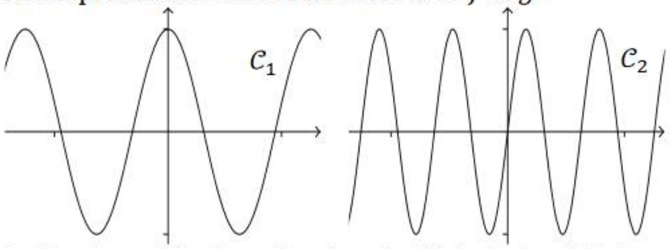
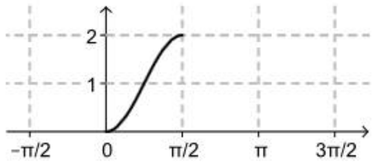
5 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sin 2x \text{ et } g(x) = 2\cos x.$$
On a représenté ci-dessous les courbes de f et g.



1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de f ?
2. Exprimer $g(-x)$ en fonction de $g(x)$. Qu'en déduit-on pour la courbe de g ?
3. Attribuer à chaque fonction sa courbe.
4. Étudier la périodicité de f et g.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 1 - \cos(2x).$$
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
2. Exprimer $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$, puis compléter $\mathcal{C}$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7 Déterminer le signe des expressions suivantes sur l'intervalle $[0; \pi]$.

a. $f_1(x) = 2 + \sin x$ **b.** $f_2(x) = 1 + \cos x$
c. $f_3(x) = \sin x - 2$ **d.** $f_4(x) = 1 - \sin^2 x$

8 À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ et en déduire le signe de $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$. Même question sur $[0; 2\pi]$.

9 Construire sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ le tableau de signe de $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $g(x) = \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.
2. **a.** Exprimer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   b. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0; \pi]$.
4. Construire le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$, construire la courbe de f sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; 3\pi]$.

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

1. **a.** Calculer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.
2. **a.** Montrer que $f'(x) = 2\sin x\,(2\cos x - 1)$.
   b. Résoudre sur $[0; \pi]$ l'inéquation $2\cos x - 1 \geq 0$.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.
3. Construire la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ dans un repère adapté

13 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leur ensemble de définition et de dérivabilité.

a. $f_1(x) = x - 2\cos x$ **b.** $f_2(x) = \sin x - \cos x$
c. $f_3(x) = \frac{1}{\sin x}$ **d.** $f_4(x) = \cos(3x)$
e. $f_5(x) = \cos^2(x)$ **f.** $f_6(x) = \frac{1}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)}$

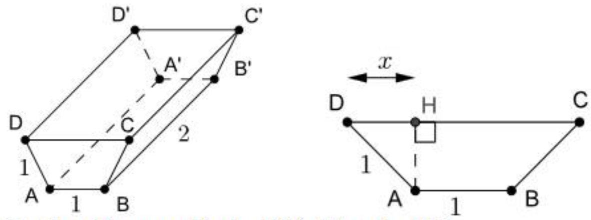
14 On définit la fonction tangente par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
On la note $f(x)$ dans la suite.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Exprimer $f(x+\pi)$ et $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?
4. **a.** Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = 1 + \left(f(x)\right)^2$.
   b. Donner les variations de f sur I puis sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. **a.** Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Étudier la position relative de C et T sur I.
   c. Tracer C et T sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x - \sin x.$$

1. f est-elle paire ? impaire ? périodique ?
2. Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire le signe de f.
4. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par
$$g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$
   Montrer que $g'(x) = f(x)$ puis que $g(x) \geq 0$.
5. **a.** En déduire que pour tout x positif
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1.$$
   b. L'inégalité est-elle encore vraie si x est négatif ?
6. En étudiant la fonction $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ montrer que pour tout x positif, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

17 Un récipient a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.
Toutes les dimensions de ce prisme sont fixes, sauf la longueur CD. On donne $AB = BC = AD = 1$ et $BB' = 2$.
On cherche la dimension à donner à la grande base $[CD]$ du trapèze $ABCD$ pour que le volume du récipient soit maximal.
On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[CD]$. On note x la longueur HD et $V(x)$ le volume du récipient.



1. Quel est l'ensemble de définition de V ?
2. Exprimer l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de x.
3. Démontrer que $V(x) = 2(x+1)\sqrt{1-x^2}$.
4. Montrer que $V'(x) = -\frac{2\left(2x^2+x-1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Déterminer pour quelle valeur de x le volume est maximal.