Calcul Intégral – Tale vers PCSI/MPSI

Théorème : Soit f une fonction définie sur $[a;b]$, strictement monotone, dérivable et de dérivée continue sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x).dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x).dx$

Réponse du Volume :

$V = \int_{-1}^{1} \pi . f^2(x).dx$ avec $f(x) = \frac{10}{(1+4x^2)^2}$ donc $V = 100\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+4x^2)^2}.dx$

on pose $g(x) = \frac{1}{(1+4x^2)^2}$; alors $G(x)$ est de la forme $G(x) = \frac{ax+b}{1+4x^2} + c\arctan(2x)$

donc $G'(x) = \frac{a(1+4x^2)-(ax+b)(1+4x^2)}{(1+4x^2)^2} + \frac{2c}{1+4x^2}$

donc $G'(x) = \frac{-4ax^2-8bx+a}{(1+4x^2)^2} + \frac{2c(1+4x^2)}{(1+4x^2)^2}$

donc $G'(x) = \frac{(-4a+8c)x^2+(-8b)x+(a+2c)}{(1+4x^2)^2}$

or $G'(x) = g(x)$ par identification : $\begin{cases} -4a+8c=0 \\ -8b=0 \\ a+2c=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases}$

donc $G(x) = \frac{x}{2(1+4x^2)} + \frac{1}{4}\arctan(2x)$

donc $V = 100\pi(G(1)-G(-1)) = 100\pi(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}(\arctan(2)-\arctan(-2)))$