# Les nombres complexes
# Le point de vue algébrique

## 1 Introduction

### 1.1 Un problème historique

À la fin du XVIe siècle, l'heure est à la résolution générale des équations du troisième degré. À l'aide d'un changement de variable, bien choisi, toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$x^3 + px + q = 0$$

- Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.

  $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

- La formule de Cardan donne l'expression de cette solution :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- Bombelli, autre mathématicien de l'époque, applique cette formule à l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad \text{avec } p = -15 \text{ et } q = -4$$

  Il obtient alors :

$$x_0 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-125}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$
$$= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

  Cette formule aboutit à une incompatibilité, à cause de $\sqrt{-1}$.

- Bombelli remarque que s'il pose $(\sqrt{-1})^2 = -1$,
  il obtient en développant les cubes suivants :[1]

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3\\ &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(-1) - (-1)\sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3\\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(-1) + (-1)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

  Il obtient $x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$,
  et constate que 4 est bien solution : $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$

- $\sqrt{-1}$ n'existe pas, mais permet de trouver la solution d'une équation. Il s'agit d'un intermédiaire de calcul. Les nombres complexes étaient nés !!
- Au XVIIe siècle, ces nombres que Descartes appelle imaginaires, deviennent intermédiaires de calcul, mais ne sont pas encore considérés comme des nombres.
- Au XVIIIe siècle, Euler montre que ces nombres peuvent se s'écrire $a + b\sqrt{-1}$. Il propose de noter $\sqrt{-1} = i$. ($i$ comme « imaginaire »).
- Au XIXe siècle Gauss montre que l'on peut représenter de tels nombres. Ils obtiennent alors le statut de nombres qu'il rebaptise complexes.

1. On rappelle que : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

## 2 Construction des nombres complexes

### 2.1 Définition

**Définition 1 :** On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe $z$ est un nombre s'écrivant sous la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec} (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i^2 = -1$$

Le nombre réel $a$ s'appelle la **partie réelle** de $z$ notée : $\text{Re}(z)$

Le nombre réel $b$ s'appelle la **partie imaginaire** de $z$ noté : $\text{Im}(z)$.

La forme $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique**.

**Remarque :**

- Si $b = 0$, $z$ est réel donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$, $z$ est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- La forme algébrique est unique :

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'$$
$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

## 2.2 Représentation des nombres complexes

**Théorème 1 :** Soit le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ appelé **plan complexe**.

À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique point $M(a; b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On dit que $z$ est **l'affixe** de M et on écrit alors $M(z)$.

**Remarque :** Réciproquement à tout point $M(a; b)$ du plan complexe, on peut associer un unique complexe $z = a + ib$. Cette application est bijective.

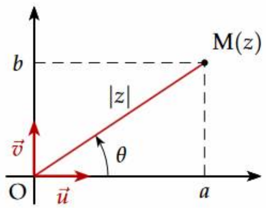
**Conséquence** On peut représenter tout nombre complexe $z = a + ib$.

L'axe des abscisses est appelé « axe des réels »

L'axe des ordonnées est appelé « axe des imaginaires purs »

On peut aussi repérer le point M par :

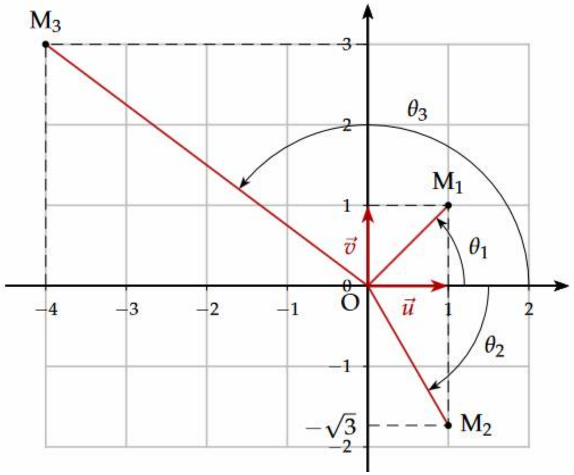
- La distance OM : le **module** de $z$ noté : $|z|$
- L'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi]$ : l'**argument** de $z$ noté $\arg(z)$.




On a $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad$ et pour $z \neq 0$, $\quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \quad$ avec $\quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

**Exemple :** Représenter puis déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i$ , $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ , $z_3 = -4 + 3i$

On a les représentations de $z_1$, $z_2$ et $z_3$ suivantes :




$$OM_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$OM_2 = |z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$OM_3 = |z_3| = \sqrt{16+9} = 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143^\circ\ [2\pi]$$

## 2.3 Opérations avec les complexes

**Définition 2 :** Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on définit deux opérations dans $\mathbb{C}$ :

- L'addition « + » : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- La multiplication « × » : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ forme un corps commutatif. Il possède donc les mêmes propriétés pour ces deux opérations que dans l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$ :

- La commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- L'intégrité (produit nul) : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \iff z = 0$ ou $z' = 0$

**Exemples :** Soit les opérations suivantes : (retenir que $i^2 = -1$)

$$z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i$$
$$z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$$
$$z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

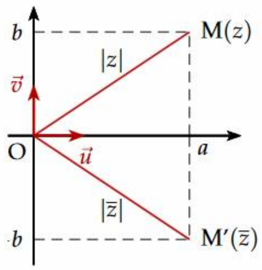
**Remarque :** **Comparaison de deux complexes** : il est possible de définir une relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ prolongement de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.
On compare les parties réelles et en cas d'égalité, les parties imaginaires.
En notant "$\preceq$" cette relation : $\quad a + ib \preceq c + id \iff a < c$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$
On a ainsi : $\quad 2 + 5i \preceq 3 - 7i$ et $\quad -1 - i \preceq -1 + 2i$
Cependant cette relation n'est pas "performante" car elle n'est pas compatible avec la multiplication : d'après cette relation : $0 \preceq i \overset{\times i}{\Rightarrow} 0 \preceq -1$ qui est faux.
On abandonne donc l'idée de comparaison et d'inéquation dans $\mathbb{C}$ !

## 2.4 Conjugué

**Définition 3 :** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
On appelle le nombre **conjugué** de $z$, le nombre noté $\overline{z}$ tel que : $\overline{z} = a - ib$.
On a alors : $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

**Démonstration :** $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2$

**Interprétation géométrique** :
M′($\overline{z}$) symétrique de M($z$) par rapport à l'axe des réels.




**Applications :**

- Trouver la forme algébrique du complexe : $z = \dfrac{2-i}{3+2i}$

  On multiplie haut et bas par le conjugué du dénominateur :
$$z = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-3i-2}{9+4} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

- Résoudre l'équation suivante : $z = (2-i)z + 3$
$$z = (2-i)z + 3 \;\Leftrightarrow\; z - (2-i)z = 3 \;\Leftrightarrow\; z(1-2+i) = 3$$
$$z = \frac{3}{-1+i} = \frac{-3}{1-i} = \frac{-3(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

## 2.5 Opérations et propriétés du conjugué

**Théorème 2 :** Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\overline{\overline{z}} = z \;,\; \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \;,\; \overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'} \;,\; \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \;,\; z' \neq 0 \;,\; \overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

**Remarque :** Le conjugué de la somme, du produit et du quotient est égal à la somme, au produit et au quotient du conjugué. Les opérations avec le conjugué ne pose aucun problème.

**Démonstration :** Ces égalités se démontrent sans soucis, en calculant à part le terme de gauche et le terme de droite en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

**Exemple :** Donner la forme algébrique du conjugué de : $z = \dfrac{3-i}{1+i}$

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{1+1} = \frac{3+3i+i-1}{2} = 1+2i$$

**Propriété 1 :** Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z$ imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z + \overline{z} = 0$
- $z$ réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$

**Démonstration :** On pose $z = a + ib$, on a alors :
$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$$
$$z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$$

**Exemple :** Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + iy,\; x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on pose $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$

1) Exprimer $Z + \overline{Z}$ en fonction de $z$ et $\overline{z}$.
2) Démontrer que : $Z$ imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M est sur un cercle privé d'un point

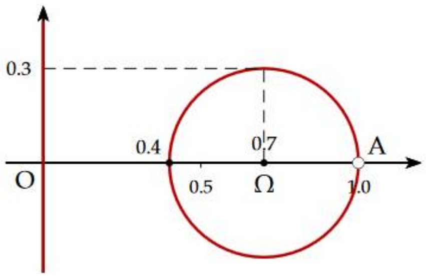
<u>Solutions :</u>

1) $Z + \overline{Z} = \dfrac{5z-2}{z-1} + \overline{\left(\dfrac{5z-2}{z-1}\right)} = \dfrac{5z-2}{z-1} + \dfrac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1} = \dfrac{(5z-2)(\overline{z}-1) + (5\overline{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)}$
$$= \frac{5z\overline{z} - 5z - 2\overline{z} + 2 + 5z\overline{z} - 5\overline{z} - 2z + 2}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4}{(z-1)(\overline{z}-1)}$$

2) $Z$ imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $Z + \overline{Z} = 0$. On a donc :
$$10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 10|z|^2 - 14\mathrm{Re}(z) + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; 10(x^2+y^2) - 14x + 4 = 0 \;\overset{\div 10}{\Leftrightarrow}\; x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 + \frac{2}{5} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{100} = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\; (x - 0{,}7)^2 + y^2 = 0{,}3^2$$

On obtient l'équation d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\,(0{,}7\,;\,0)$ et de rayon $0{,}3$.

Le point $(1;0)$ appartient au cercle, comme $z \neq 1$, ce point ne peut faire partie de l'ensemble des points M.




**Remarque :** Si M($z$) se trouve sur le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $(1;0)$, le point M′($Z$) se trouve sur l'axe des ordonnées. Le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $(1;0)$ se transforme ainsi en la droite des ordonnées par l'application $f$ tel que $f(z) = Z$

# 3 Équation polynomiale à coefficients réels

## 3.1 Équation du second degré

**Théorème 3 :** Soit l'équation à coefficients réels $(a \neq 0)$ : $az^2 + bz + c = 0$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Cette équation admet comme solution :

- Si $\Delta > 0$ , deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées avec $\Delta = i^2(-\Delta)$

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

⚠ La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que si $z$ est un **réel positif ou nul**.

**Exemple :** Résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Comme $\Delta < 0$ on a 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

**Algorithme :** Soit la fonction Python eq2($a$,$b$,$c$) permettant de calculer les racines de : $ax^2 + bx + c$

Un nombre complexe en Python s'écrit : $a + 1j * b$ ou complex($a$,$b$).

L'expression $1j$ remplace la lettre $i$

Cette fonction renvoie pour eq2(1 ,−2 , 2) : $(1 + 1j), (1 - 1j)$

```
from math import*
def eq2(a,b,c):
    D=b**2-4*a*c
    if D>=0:
        x=(-b+sqrt(D))/(2*a)
        y=(-b-sqrt(D))/(2*a)
    else:
        x=(-b+1j*sqrt(-D))/(2*a)
        y=(-b-1j*sqrt(-D))/(2*a)
    return x,y
```

## 3.2 Factorisation et racines d'un polynôme

On considère des polynômes $P$ de degré $n$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ c_k \in \mathbb{R} \text{ et } c_n \neq 0$$

On note $\deg P = n$ et si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de $P$, alors : $P(a) = 0$

**Théorème 4 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)Q(z) \quad \text{avec } Q \text{ polynôme de degré } (n-1)$$

**Démonstration :** Par récurrence. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n - a^n = (z-a)Q(z)\ ,\ \deg Q = n - 1$$

**Initialisation :** $n = 1$, $z^1 - a = (z-1) \times 1 \;\Rightarrow\; Q(z) = 1$ de degré 0.

La proposition est initialisée.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $z^n - a^n = (z-a)Q(z)$ , $\deg Q = n-1$,

montrons que $z^{n+1} - a^{n+1} = (z-a)R(z)$ , $\deg R = n$

De HR, on a : $z^n = (z-a)Q(z) + a^n$ (1)

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z(z^n) - a^{n+1} \overset{(1)}{=} z\left[(z-a)Q(z) + a^n\right] - a^{n+1} = z(z-a)Q(z) + a^n z - a(a^n) \\ &= z(z-a)Q(z) + a^n(z-a) = (z-a)\underbrace{\left[z\,Q(z) + a^n\right]}_{R(z)} \end{aligned}$$

$\deg Q = n - 1 \;\Rightarrow\; \deg z\,Q(z) = n \;\Rightarrow\; \deg R = n$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n - a^n = (z-a)Q(z)$ , $\deg Q = n - 1$

**Exemple :** Factoriser $z^3 - 8 = z^3 - 2^3$

On peut factoriser par $(z-2)$

Pour trouver la factorisation, on effectue une division euclidienne (ci-contre).

On soustrait à chaque étape le quotient trouvé.

On obtient : $z^3 - 8 = (z-2)(z^2+2z+4)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & +\,0z^2 & +\,0z & -\,8 & z-2 \\
\cline{5-5}
-z^3 & +\,2z^2 & & & z^2+2z+4 \\
\cline{1-2}
0z^3 & +\,2z^2 & +\,0z & & \\
 & -2z^2 & +\,4z & & \\
\cline{2-3}
 & 0z^2 & +\,4z & -\,8 & \\
 & & -4z & +\,8 & \\
\cline{3-4}
 & & 0z & +\,0 &
\end{array}
$$

**Théorème 5 :** Soit $P$ un polynôme de degré $n$ et $a$ une racine de $P$.
$P$ se factorise par $(z-a)$ et donc $P(z) = (z-a)Q(z)$ avec $\deg Q = n-1$.

**Démonstration :** Avec le symbole $\sum$.

On pose $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ et comme $a$ est une racine de $P$, on a $P(a) = 0$.

En utilisant le théorème précédent :

$$P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k - \sum_{k=0}^{n} c_k a^k = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k - a^k) \overset{z^0 - a^0 = 0}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{(z^k - a^k)}_{(z-a)Q_k(z)}$$

$$= (z-a) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k Q_k(z)}_{Q(z)} = (z-a)Q(z)$$

Or $\deg Q_n = n-1$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\deg Q_k < n-1$, donc $\deg Q = n-1$.

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ : $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$

- On pose $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$.
  $z = 1$ est une racine évidente car $P(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$.

- D'après le théorème précédant $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

- On détermine les coefficients $a, b, c$ par identification sur le polynôme $P$ :

  $(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b-a)z^2 + (c-a)z - c$

  De façon immédiate : $a = 1$ et $c = 4$ et sur le coef. de $z^2$ : $b - a = 1 \Rightarrow b = 2$
  On a alors : $P(z) = (z-1)(z^2+2z+4)$

- $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$
  $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ deux racines complexes conjuguées :

  $$z_1 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$

  $S = \left\{1\,; -1+i\sqrt{3}\,; -1-i\sqrt{3}\right\}$

**Théorème 6 :** Un polynôme non nul de degré $n$ admet au plus $n$ racines.

**Démonstration :** Par récurrence. Soit $P_n$ un polynôme non nul de degré $n$.

**Initialisation :** $n = 0$, $P_0$ est constant non nul donc n'admet pas de racine.
La propriété est initialisée.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P_n$ admet au plus $n$ racines,
montrons que $P_{n+1}$ admet au plus $(n+1)$ racines.

- Si $P_{n+1}$ n'a pas de racine, alors $P_{n+1}$ admet au plus $(n+1)$ racines.

  La proposition est héréditaire.

- Si $P_{n+1}$ possède une racine $a$ alors, d'après le th. précédant : $P_{n+1}(z) = (z-a)P_n$

  Si $P_{n+1}$ possède une autre racine $b \neq a$, alors d'après l'intégrité de $\mathbb{C}$ :

  $$P_{n+1}(b) = 0 \Rightarrow (b-a)P_n(b) = 0 \overset{b \neq a}{\Rightarrow} P_n(b) = 0 \Rightarrow b \text{ racine de } P_n$$

  À part $a$ toutes les autres racines de $P_{n+1}$ sont des racines de $P_n$ qui d'après HR possède au plus $n$ racines, donc $P_{n+1}$ possède au plus $(n+1)$ racines.
  La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, un polynôme de degré $n$ possède au plus $n$ racines.

# 4 Formule du binôme

**Théorème 7 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

**Démonstration :** Par récurrence. Avec le symbole $\sum$

Soit la propriété : $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

**Initialisation :** $n=0,\ (a+b)^0 = 1$ et $\dbinom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La proposition est initialisée.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) &\overset{\text{HR}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\right](a+b)\\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on change $k \to k+1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}\, b^k + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k + b^{n+1}\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\text{relation de Pascal}} a^{n+1-k}\, b^k + b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k. \quad \text{La proposition est héréditaire.}
\end{aligned}$$

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

**Exemple :** À l'aide de la formule du binôme et en s'aidant du triangle de Pascal, développer : $(1+i)^5$ et $(2-i)^4$

$$\begin{aligned}
(1+i)^5 &= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5\\
&= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i\\
&= -4 - 4i\\
(2-i)^4 &= 2^4 + 4(2^3)(-i) + 6(2^2)(-i)^2 + 4(2)(-i)^3 + (-i)^4\\
&= 16 - 32i - 24 + 8i + 1\\
&= -7 - 24i
\end{aligned}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 1 | 1 | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Triangle de Pascal
jusqu'au degré 5

### Complément (dans la lignée du programme)

**Théorème :** Tout polynôme à coefficients réels admet un nombre pair de racines complexes non réelles. Ces racines sont alors conjuguées deux à deux.

Soit un polynôme $P$ de degré $n$ à coefficients réels :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$$

On suppose que $z_0$ est racine de $P$, montrons alors que $\overline{z_0}$ est aussi racine de $P$.

$$\begin{aligned}
P(z_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{P((z_0)} = \overline{0}\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, z_0^n + a_{n-1}\, z_0^{n-1} + \cdots + a_1\, z_0 + a_0} = \overline{0}\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n\, z_0^n} + \overline{a_{n-1}\, z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\, z_0} + \overline{a_0} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{a_n}\, \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\, \overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\, \overline{z_0} + \overline{a_0} = 0
\end{aligned}$$

Comme les coefficients sont réels, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\overline{a_k} = a_k$ et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a_n\, \overline{z_0}^n + a_{n-1}\, \overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{z_0} + a_0 = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{z_0} \text{ racine du polynôme } P
\end{aligned}$$

### Culture

**Théorème fondamental de l'algèbre :** Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes admet exactement $n$ racines distinctes ou non.

Théorème conjecturé par d'Alembert (1717-1783) et démontré par Gauss (1777-1855).

Exemple : Racines 4e de l'unité,

$$z^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2-1)(z^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$$

On en déduit les 4 racines 4e de l'unité : $S_{\mathbb{C}} = \{-1\,;\,1\,;\,-i\,;\,i\}$.