

Exercices : Développements limités – SOS maths 2023

Définition :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de zéro lorsqu'il existe :

- des réels a_0, a_1, \dots, a_n

- une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ nulle en zéro tq $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Formule de TAYLOR : $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n + o(x)^n$ où $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Ex 1 : Déterminer un DL en 0 des fonctions usuelles d'ordre 5

$$e^x ; \cos(x) ; \sin(x) ; ch(x) ; sh(x) ; \tan(x) ; th(x) ; \\ (1+x)^\alpha ; \frac{1}{1-x} ; \frac{1}{1-x} ; \sqrt{1+x} ; \frac{1}{\sqrt{1+x}} ; \ln(1+x) ; \arctan(x)$$

Ex 2 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ avec $x \neq 0$

- 1) Déterminer un DL de f en 0 d'ordre 1
- 2) En déduire la limite de f en 0

Ex 3 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x} \times \cos(x)$

Ex 4 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \tan(\sin(x))$

Ex 5 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$

Ex 6 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \arccos(x)$

Ex 7 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 7 de la fonction $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Ex 8 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

- 1) Montrer que C_f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$
- 2) Étudier la position relative de cette asymptote avec C_f

Ex 9 : Montrer la validité des 2 limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = \frac{-1}{6}$$

Exercices : Développements limités – SOS maths 2023

Définition :

Soient I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de zéro lorsqu'il existe :

- des réels a_0, a_1, \dots, a_n

- une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ nulle en zéro tq $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Formule de TAYLOR : $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n + o(x)^n$ où $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Ex 1 : Déterminer un DL en 0 des fonctions usuelles d'ordre 5

$$e^x ; \cos(x) ; \sin(x) ; ch(x) ; sh(x) ; \tan(x) ; th(x) ; \\ (1+x)^\alpha ; \frac{1}{1-x} ; \frac{1}{1-x} ; \sqrt{1+x} ; \frac{1}{\sqrt{1+x}} ; \ln(1+x) ; \arctan(x)$$

Ex 2 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$ avec $x \neq 0$

- 1) Déterminer un DL de f en 0 d'ordre 1
- 2) En déduire la limite de f en 0

Ex 3 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 3 de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x} \times \cos(x)$

Ex 4 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \tan(\sin(x))$

Ex 5 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$

Ex 6 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction $f(x) = \arccos(x)$

Ex 7 : Déterminer un DL en 0 d'ordre 7 de la fonction $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Ex 8 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

- 1) Montrer que C_f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$
- 2) Étudier la position relative de cette asymptote avec C_f

Ex 9 : Montrer la validité des 2 limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = \frac{-1}{6}$$