

## Exercices : Développements limités – SOS maths 2023

### Définition :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $0$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de zéro lorsqu'il existe :

- des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$

- une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  nulle en zéro tq  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

**Formule de TAYLOR :**  $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n + o(x)^n$  où  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

**Ex 1 :** Déterminer un DL en 0 des fonctions usuelles d'ordre 5

$$e^x ; \cos(x) ; \sin(x) ; ch(x) ; sh(x) ; \tan(x) ; th(x) ;$$

$$(1+x)^\alpha ; \frac{1}{1-x} ; \frac{1}{1-x} ; \sqrt{1+x} ; \frac{1}{\sqrt{1+x}} ; \ln(1+x) ; \arctan(x)$$

**Ex 2 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$  avec  $x \neq 0$

- 1) Déterminer un DL de  $f$  en 0 d'ordre 1
- 2) En déduire la limite de  $f$  en 0

**Ex 3 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 3 de la fonction  $f(x) = \sqrt{1-x} \times \cos(x)$

**Ex 4 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \tan(\sin(x))$

**Ex 5 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \arcsin(x)$

**Ex 6 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \arccos(x)$

**Ex 7 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 7 de la fonction  $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

**Ex 8 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

- 1) Montrer que  $C_f$  possède une droite asymptote au voisinage de  $+\infty$
- 2) Étudier la position relative de cette asymptote avec  $C_f$

**Ex 9 :** Montrer la validité des 2 limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = \frac{-1}{6}$$

## Exercices : Développements limités – SOS maths 2023

### Définition :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $0$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$

On dit que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de zéro lorsqu'il existe :

- des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$

- une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$  nulle en zéro tq  $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

**Formule de TAYLOR :**  $f(x) = a_0 + \dots + a_nx^n + o(x)^n$  où  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

**Ex 1 :** Déterminer un DL en 0 des fonctions usuelles d'ordre 5

$$e^x ; \cos(x) ; \sin(x) ; ch(x) ; sh(x) ; \tan(x) ; th(x) ;$$

$$(1+x)^\alpha ; \frac{1}{1-x} ; \frac{1}{1-x} ; \sqrt{1+x} ; \frac{1}{\sqrt{1+x}} ; \ln(1+x) ; \arctan(x)$$

**Ex 2 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$  avec  $x \neq 0$

- 1) Déterminer un DL de  $f$  en 0 d'ordre 1
- 2) En déduire la limite de  $f$  en 0

**Ex 3 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 3 de la fonction  $f(x) = \sqrt{1-x} \times \cos(x)$

**Ex 4 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \tan(\sin(x))$

**Ex 5 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \arcsin(x)$

**Ex 6 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 5 de la fonction  $f(x) = \arccos(x)$

**Ex 7 :** Déterminer un DL en 0 d'ordre 7 de la fonction  $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$

**Ex 8 :** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

- 1) Montrer que  $C_f$  possède une droite asymptote au voisinage de  $+\infty$
- 2) Étudier la position relative de cette asymptote avec  $C_f$

**Ex 9 :** Montrer la validité des 2 limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = \frac{-1}{6}$$