Corrections: Développements limités – SOS maths 2023

Ex 1 :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+x^6\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+x^6\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+X}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^2-\frac{1\times 3\times 5}{2\times 3\times 6}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+X} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\times 4}x^2+\frac{1\times 3}{2\times 4\times 6}x^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{argth}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

Ex 2 :

Montrons que f admet une limite fini en zéro.

$DL_3(0)$ de $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

Donc $\sin x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^3}{6}$

Ainsi $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{-x^3}{6}}{x^3} = \frac{-1}{6}$

f admet un prolongement continue en zéro obtenu en posant $f(0)=\frac{-1}{6}$

Montrons que f est dérivable en zéro.

Il suffit de montrer que f admet un \DL{1} $DL_4(0)$ de $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)$ où $\varepsilon \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc si $x\neq 0$, $f(x)=\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\frac{\frac{-x^3}{6}+x^4\varepsilon(x)}{x^3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{6}+x\varepsilon(x) \qquad DL_1(0) \text{ de } f \\ &= a_0+a_1x+x\varepsilon(x) \end{aligned}$$

ou $a_0=\frac{-1}{6}$ et $a_1=0$

D'après le cours, f est dérivable en zéro et $f'(0)=0$

Ex 3 :

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

$DL_3(0)$ de $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

Ainsi

$$\sqrt{1-x}\times\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right)$$

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2-\frac{3}{18}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

Ex 4 :

On pose $u=\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$$\tan \underset{u\to 0}{=} u = \frac{u^3}{3}+\frac{2}{15}u^5+o(u^5)$$

$$u \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$u^2 \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$$

$$u^3=u^2\times u \underset{x\to 0}{=} x^3-\frac{1}{6}x^5-\frac{1}{3}x^5+o(x^5)=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)$$

$$u^5 \underset{x\to 0}{=} x^5+o(x^5)$$

Ainsi $\tan(\sin(x)) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Conclusion : $f(x) \underset{x\to0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + o(x^5)$

Ex 5 :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$$

$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u}$ où $u = \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$

$$u = \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$u \underset{x\to0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$, $u^3 \underset{x\to0}{\sim} \frac{-x^6}{8} = o(x^5)$, de même pour u^4 et u^5

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + o(u^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+\cos(u)} \underset{u\to0}{=} 1 - \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\sin(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\ &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^5 = \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

Ex 6 :

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il faut donc un \DL{4} de $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ Posons $u = -x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{u\to0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + \ldots + o(x^4)$$

or $u^3 \underset{u\to0}{=} -x^6 = o(x^4)$ de même pour u^4

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{u\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{8}x^4 + o(x^4)$$

On multiplie par -1 et on primitive

Donc

Ex 7 :

On a $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{(\cos(x)-1)+1}$

On pose $u = \cos(x) - 1$

$$\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)$$

$$\sqrt{\cos(x)} \underset{x\to0}{=} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)}$$

$$\sqrt{\cos(x) - 1} \underset{x\to0}{=} \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)}$$

$$\sqrt{1+u} \underset{x\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \underbrace{\ldots}_{\text{calcul inutile}} + o(u^7)$$

$u \underset{u\to0}{\sim} \frac{-x^2}{6}$ ainsi $u^3 \underset{u\to0}{\sim} \frac{x^6}{8}$, $u^4 \underset{u\to0}{\sim} \frac{x^8}{16} = o(x^7)$, de même

pour $u^5 = o(x^7)$, $u^6 = o(x^7)$ et $u^7 = o(x^7)$

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{-x^6}{8}\right) + o(x^7) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o(x^7)\end{aligned}$$

Ex 8 :

1. Ici $x^3 - 3x + 2 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ donc $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} \underset{+\infty}{\sim} x$ i.e. $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 (a = 1)$

On doit étudier $f(x) - x$

Si $x > 0$,

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x$$
$$= \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} - x$$
$$x\left[\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$$

On pose $u = \dfrac{-3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$DL_1(0)$: $(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{u}{3} + o(u) = 1 + \dfrac{u}{3} + u\varepsilon(u)$ où $\varepsilon(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$

$u \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{-3}{x^2}$

Donc $(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1 = \dfrac{1}{3}u + o(u) \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}u$

ainsi $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x}$

En particulier $f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 (b = 0)$

D'où l'asymptote $\Delta : y = x$

2. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{-1}{x} < 0$

0Donc $f(x) - x < 0$

Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessous de son asymptote

Ex 9 :

1. Montrons que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8}$

$$DL_3(0) : \sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$
$$DL_3(0) : \sqrt{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3}$$
$$\underset{x \to 0}{=} \frac{\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$
$$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{8} + o(1)$$
$$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{8} + \varepsilon(x) \qquad \text{où } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{8}$

2. Montrons que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2(x)}{x^4} = -\frac{1}{6}$

On pose $u = x^2$, $DL_2(0)$

$$\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$
$$\ln(1+x^2) \underset{x \to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$DL_4(0)$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$\sin^2(x) \underset{x \to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

Donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \dfrac{-1}{6} + o(1)$

Donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{-1}{6} + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ i.e. $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{6}$