Maths Expertes - TD - Nombres complexes

Exercice 1

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = 3\cdot(2-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot(3+2\cdot\mathrm{i})$ b. $z_2 = (5+2\cdot\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})$

Exercice 2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1 = (5+2\cdot\mathrm{i})^2$ b. $z_5 = (2-\mathrm{i})^2 - 2\cdot(1+3\cdot\mathrm{i})^2$

Exercice 3

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :
$z = (x+2\cdot\mathrm{i})\cdot(1-x\cdot\mathrm{i})$

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z.
2. a. Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un nombre réel?
   b. Pour quelle(s) valeur(s) de x, z est un imaginaire pur?

Exercice 4

1. On considère le polynôme P à coefficient dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $P = 2\cdot z^3 + z^2 + 2\cdot z + 1$

   Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont des racines du polynôme P :
   $z_1 = -\mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i}$; $z_3 = -\dfrac{1}{2}$

2. On considère le polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{C}$ par : $Q = \mathrm{i}\cdot z^2 + (2+\mathrm{i})\cdot z + 2$

   Vérifier que le nombre complexe $z_4 = 2\cdot\mathrm{i}$ est une racine du polynôme Q.

Exercice 5

1. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E) définie par :
   (E) : $z + 2 - \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})\cdot z$

   Montrer que le nombre complexe $-1-2\mathrm{i}$ est solution de l'équation (E).

2. Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (F) définie par :
   (F) : $(z-1+2\cdot\mathrm{i})(z+2\cdot\mathrm{i}) = z^2 - \mathrm{i}$

   Montrer que le nombre complexe $-\mathrm{i}$ est solution de l'équation (F).

Exercice 6

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations :

a. $\dfrac{z-5}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ b. $\dfrac{2-3\cdot z}{z+\mathrm{i}} = -2\cdot\mathrm{i} + z$

Indication pour la seconde équation : l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est dit **intègre**. C'est-à-dire qu'il vérifie la propriété pour tout nombre complexe a et b :
$a\cdot b = 0 \implies a = 0$ ou $b = 0$

Exercice 7

Méthode : considérons le nombre définie par $\dfrac{z}{z'}$, où z et z' sont deux nombres complexes. Pour obtenir son écriture algébrique, on considère le quotient $\dfrac{z\cdot\overline{z'}}{z'\cdot\overline{z'}}$ dont le dénominateur est un nombre réel.

Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a. $z = \dfrac{1}{\mathrm{i}}$ b. $z = \dfrac{2}{2-\mathrm{i}}$ c. $z = \dfrac{3}{1+2\cdot\mathrm{i}}$

Exercice 8

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :
$z_1 = 1+\mathrm{i}$; $z_2 = 5-2\cdot\mathrm{i}$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_1 - 2\cdot z_2$
d. $z_1 \cdot z_2$ e. $\dfrac{z_1}{z_2}$ f. $\dfrac{z_2}{z_1 - z_2}$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2-3\cdot z}{z+\mathrm{i}} = -2\cdot\mathrm{i} + z$ b. $(1+2\cdot\mathrm{i})(z-3\cdot\mathrm{i}) = z + 2 + 3\cdot\mathrm{i}$

Exercice 10

Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

a. $z_1 = (1+\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})$; $z_2 = (1-i)\cdot(2+i)$

b. $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}-3}{2+2\cdot\mathrm{i}}$; $z_2 = \dfrac{-\mathrm{i}-3}{2-2\cdot\mathrm{i}}$

c. $z_1 = (1-\mathrm{i})^5$; $z_2 = (1+\mathrm{i})^5$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

a. $z + \overline{z} = 6$ b. $z + \overline{z} = \mathrm{i}$
c. $z + 2\cdot\overline{z} = 8 + \mathrm{i}$ d. $\mathrm{i}\cdot\overline{z} + 2\cdot(z-5) = 0$

Exercice 12

Donner l'écriture algébrique du nombre : $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} (1+\mathrm{i})^k$

Exercice 13

1. Simplifier l'écriture de l'expression suivante :
   $A = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3$
2. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe :
   $B = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \cdots + \mathrm{i}^{99}$

Exercice 14

Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par : $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$