69 **a)** L'équation $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$ équivaut à

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$
$$= 17 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \times \frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$
$$= 17.$$
$$\frac{(n-4)}{5} = 17.$$
$$n - 4 = 85.$$
$$n = 89.$$

b) $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 387n$

$$2n + \frac{2n(2n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 387n$$

$$2n + \frac{4n^2 - 2n}{2} + \frac{8n^3 - 12n^2 + 4n}{6} = 387n$$

$$\frac{12n + 12n^2 - 6n + 8n^3 - 12n^2 + 4n}{6} = 387n$$

$$\frac{8n^3 + 10n}{6} = 387n$$

$$8n^3 + 10n = 2322n$$

$$8n^3 - 2312n = 0$$

$$8n(n^2 - 289) = 0$$

$$8n(n-17)(n+17) = 0$$

Cette dernière équation admet trois solutions, 0, 17 et -17, mais seul 17 est une solution valable pour l'équation initiale.

70 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1(2n-2)\ldots(n+1)}{n!}$.

b) S'il y a exactement p boules blanches, alors il y exactement n - p boules rouges.

Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{n}{p} \times \binom{n}{n-p}$.

Or par symétrie des nombres de combinaisons, $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Donc le nombre de tirages avec p boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) Un tirage peut comporter entre 0 et n boules blanches.

Donc la somme $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$ est égale au nombre total de tirages, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

(formule de Vandermonde)