C.1 On a les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (1-2\,;-2-1) = (-1\,;-3)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A) = (-1-2\,;2-1) = (-3\,;1)$

Déterminons le produit scalaire des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y' = (-1)\times(-3) + (-3)\times1$$
$$= 3 - 3 = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit et donc le triangle ABC est rectangle en A.

C.2

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A\,;y_D - y_A) = (4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$$
   $$= 1\times4 + (-4)\times1 = 0$$

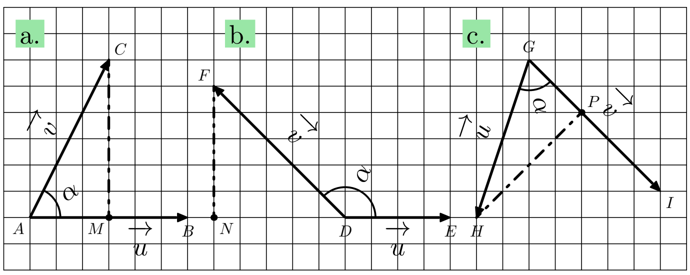
2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;y_C - y_D) = (1\,;-4)$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

C.3



1.
- $\Rightarrow$ $\|\vec{u}\| = 6$

  $\Rightarrow$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

  $\Rightarrow$ Le point M est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = AM\times AB = 3\times6 = 18$$
- $\Rightarrow$ $\|\vec{u}\| = 4$

  $\Rightarrow$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

  $\Rightarrow$ Le point N est le projeté orthogonal du point F sur la droite (DE). Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont colinéaires et de même sens :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DN} = -DE\times DN = -4\times5 = -20$$
- $\Rightarrow$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

  $\Rightarrow$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

  $\Rightarrow$ Le point P est le projeté orthogonal du point H sur la droite (GI). Les vecteurs $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et de même sens :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{GI} = GP\times GI = \sqrt{8}\times\sqrt{50}$$
  $$= \sqrt{8\times50} = \sqrt{400} = 20$$

2.
- Le produit scalaire est donné par la formule :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$$
  $$18 = 6\times\sqrt{45}\times\cos\alpha$$
  $$\cos\alpha = \frac{18}{6\times\sqrt{45}}$$
  $$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{18}{6\times\sqrt{45}}\right)$$
  $$\alpha \approx 63{,}435$$
  $$\alpha \approx 63{,}4^o$$
- Le produit scalaire est donné par la formule :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$$
  $$-20 = 4\times\sqrt{50}\times\cos\alpha$$
  $$\cos\alpha = \frac{-20}{4\times\sqrt{50}}$$
  $$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{20}{4\times\sqrt{50}}\right)$$
  $$\alpha = 135^o$$
- Le produit scalaire est donné par la formule :
  $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$$
  $$20 = \sqrt{40}\times\sqrt{50}\times\cos\alpha$$
  $$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{40}\times\sqrt{50}}$$
  $$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{40}\times\sqrt{50}}\right)$$
  $$\alpha \approx 63{,}435$$
  $$\alpha \approx 63{,}4^o$$

C.4

1. Dans le triangle BHC rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a la propriété :
   $$AC^2 = BH^2 + HC^2$$
   $$13^2 = 12^2 + HC^2$$
   $$169 = 144 + HC^2$$
   $$HC^2 = 169 - 144$$
   $$HC^2 = 25$$
   $$HC = \sqrt{25}$$
   $$HC = 5$$

   La relation de Chasles permet d'écrire les décompositions :
   - $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}$
   - $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}$

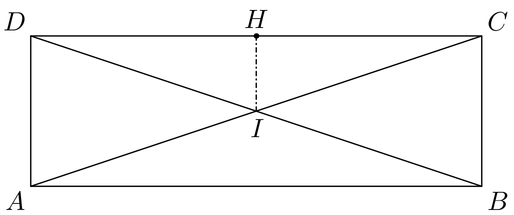
   Le produit scalaire peut s'exprimer par :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}\right)$$
$$= \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$$
$$= 12^2+0+0+\left(-9\times5\right) = 144-45 = 99$$

(2) Ce produit scalaire s'exprime aussi par :
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC} = 15\times13\times\cos\widehat{ABC}$

De l'égalité de ces deux expressions du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:
$$99 = 15\times13\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{99}{15\times13}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{99}{15\times13}\right)$$
$$\widehat{ABC} \approx 59{,}489$$
$$\widehat{ABC} \approx 59{,}5$$

C.5 Pour montrer que les deux droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires, nous allons étudier le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI}$.
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BI} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CI}$$
En utilisant les angles droits du rectangle :
$$= 0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+0$$
En utilisant la colinéarité des vecteurs mis en jeux dans ces produits scalaires :
$$= -AB\times CI+BC\times BC = -a\times\frac{a}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2$$
$$= -\frac{a^2}{2}+\frac{2}{4}\cdot a^2 = -\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$$
Le produit scalaire est nul et aucun de ces deux vecteurs est nul ; les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.



C.6

(1) On a :
$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HC}\right)$$
$$= \overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC}$$
Les droites (IH) et (DC) sont perpendiculaires :
$$= \|\overrightarrow{IH}\|^2+0+0+\left(-\|\overrightarrow{HD}\|\times|\overrightarrow{HC}\|\right)$$
$$= IH^2-HC^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot AD\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot AB\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\cdot AD^2-\frac{1}{4}\cdot AB^2 = \frac{1}{4}\times2^2-\frac{1}{4}\times6^2$$
$$= 1-9 = -8$$

(2) (a) Dans le triangle ABC rectangle en B, on a :
$$AC^2 = AB^2+BC^2$$
$$AC^2 = 6^2+2^2$$
$$AC^2 = 36+4$$
$$AC^2 = 40$$
$$AC = \sqrt{40} = 2\cdot\sqrt{10}$$

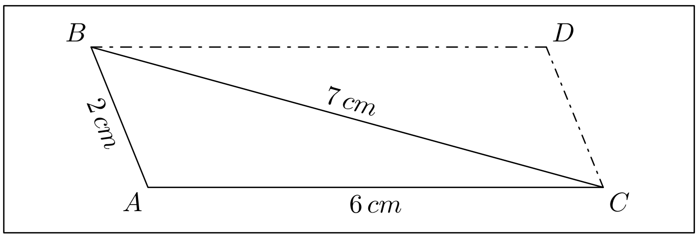
Le point I, intersection des diagonales, est également le milieu du segment $[AC]$:
$$IC = \frac{1}{2}\cdot AC = \sqrt{10}$$

(b) On en déduit :
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IC}$ peut s'exprimer par :
$$\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \|\overrightarrow{ID}\|\times\|\overrightarrow{IC}|\times\cos\widehat{DIC}$$
$$-8 = \sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\widehat{DIC}$$
$$-8 = 10\times\cos\widehat{DIC}$$
$$\frac{-8}{10} = \cos\widehat{DIC}$$
$$\cos\widehat{DIC} = \frac{-8}{10}$$
$$\widehat{DIC} = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{10}\right)$$
$$\widehat{DIC} \approx 143{,}13$$
$$\widehat{DIC} \approx 143$$

C.7

(1) En prenant : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
on obtient l'égalité :
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\times\vec{u}\cdot\vec{v}$$
$$\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\|^2 = AB^2+AC^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\|\overrightarrow{CB}\|^2 = AB^2+AC^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$CB^2 = AB^2+AC^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$7^2 = 2^2+6^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 49-4-36$$
$$-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{9}{-2}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4{,}5$$

(2) (a) Voici le point D tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme :



(b) En prenant : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
on obtient l'égalité :

$$\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|u\right\|^2 + \left\|v\right\|^2 + 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|AB\right\|^2 + \left\|AC\right\|^2 + 2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right\|^2 = AB^2 + AC^2 + 2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = 2^2 + 6^2 + 2\times\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$AD^2 = 4 + 36 - 9$$
$$AD^2 = 31$$
$$AD = \sqrt{31}$$
$$AD \approx 5{,}567$$
$$AD \approx 5{,}6\,cm$$

C.8 Etudions le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC}$$

Par orthogonalité des vecteurs, on a :
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$; $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

Par colinéarité, on a :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens :
  $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = AC\times AC = AC^2$
- Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont de sens opposés :
  $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BA} = -CD\times BA$

Ainsi, pour les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires, si :

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$
$$AC^2 + \left(-CD\times AB\right) = 0$$
$$2^2 - 3\times x = 0$$
$$4 - 3\times x = 0$$
$$-3\times x = -4$$
$$x = \frac{-4}{-3}$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Pour que les diagonales soient perpendiculaires, il faut le segment $[AB]$ mesure $\frac{4}{3}\,cm$

C.9 On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{BA}(x_A-x_B\,;y_A-y_B) = (1-4\,;1-2) = (-3\,;-1)$
- $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B) = (3-4\,;\,-1-2) = (-1\,;-3)$

On a les longueurs suivantes :

- $BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
- $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

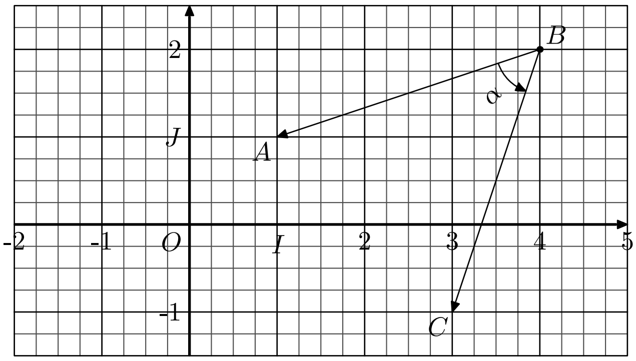
Les caractérisations du produit scalaire permettent d'écrire les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$(-3)\times(-1) + (-1)\times(-3) = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$3+3 = \sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$6 = 10\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$$
$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{6}{10}$$
$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = 0{,}6$$

On a : $\cos^{-1}(0{,}6) \approx 53{,}1301 \approx 53{,}1^o$

On en déduit : $\widehat{ABC} \approx 53{,}1^o$

Voici la représentation de ces trois points et l'orientation de l'angle $\widehat{ABC}$:



On en déduit : $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) \approx 53{,}1^o$

C.10 On a les coordonnées de vecteurs :

- $\overrightarrow{CA}(x_A-x_C\,;y_A-y_C) = (6-3\,;3-(-1)) = (3\,;4)$
- $\overrightarrow{CB}(x_B-x_C\,;y_B-y_C) = (1-3\,;1-(-1)) = (-2\,;2)$

Déterminons le produit scalaire des deux manières suivantes :

- $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\times(-2) + 4\times 2 = -6+8 = 2$
- On a les normes des vecteurs :
  - $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
  - $\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

  On en déduit l'expression du produit scalaire :
  $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|\times\|\overrightarrow{CB}\|\times\cos\widehat{BCA} = 5\times\sqrt{8}\times\cos\widehat{BCA}$

Par identification de ces deux expressions du produit scalaire, on a :

$$2 = 5\times\sqrt{8}\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\cos\widehat{BCA} = \frac{2}{5\times\sqrt{8}}$$
$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5\times\sqrt{8}}\right)$$
$$\widehat{BCA} \approx 81{,}869$$
$$\widehat{BCA} \approx 81{,}9$$