Fonctions du Second degré - 1ère spé maths - Vendredi 24 novembre

C.1

a) $x^2+4x-5 = \big[(x+2)^2-4\big]-5 = (x+2)^2-9$

b) $x^2-2x-1 = \big[(x-1)^2-1\big]-1 = (x-1)^2-2$

C.2

a) $2x^2+12x-4 = 2{\cdot}\big(x^2+6x\big)-4$

$= 2{\cdot}\big[\big(x^2+6x+9\big)-9\big]-4 = 2{\cdot}\big[\big(x+3\big)^2-9\big]-4$

$= 2{\cdot}\big(x+3\big)^2-18-4 = 2{\cdot}\big(x+3\big)^2-22$

b) $3x^2+30x+12 = 3{\cdot}\big(x^2+10x\big)+12$

$= 3{\cdot}\big[\big(x^2+10x+25\big)-25\big]+12 = 3{\cdot}\big[\big(x+5\big)^2-25\big]+12$

$= 3{\cdot}\big(x+5\big)^2-75+12 = 3{\cdot}\big(x+5\big)^2-63$

C.3

1) On a les transformations algébriques suivantes :

$x^2-6x+3 = \big(x^2-6x\big)+3 = \big(x^2-6x+9-9\big)+3)+3$

$= \big[\big(x-3\big)^2-9\big]+3 = \big(x-3\big)^2-6$

2) Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} x^2-6x+3 &= 19\\ \big(x-3\big)^2-6 &= 19\\ \big(x-3\big)^2 &= 19+6\\ \big(x-3\big)^2 &= 25\\ \big(x-3\big)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Utilisons la propriété : si les carrés de deux nombres sont égaux alors ces deux nombres sont égaux ou ces deux nombres sont opposés.
On en déduit les deux implications suivantes :

$x-3=5$	$x-3=-5$
$x=5+3$	$x=-5+3$
$x=8$	$x=-2$

Cette équation a pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \big\{-2\,;\,8\big\}$

C.4

a) Cherchons les racines de x^2+4x-5 :

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4{\times}1{\times}(-5) = 16+20 = 36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{-4-6}{2}$	$= \dfrac{-4+6}{2}$
$= \dfrac{-10}{2}$	$= \dfrac{2}{2}$
$= -5$	$= 1$

b) Cherchons les racines de x^2+x+1 :

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4{\times}1{\times}1 = -3$

Le discriminat de ce trinôme est strictement négatif ; il n'admet aucune racine.

c) Cherchons les racines de $2x^2-13x+15$:

Le discrimant de ce polynome du second degré est :
$\Delta = b^2-4ac = (-13)^2-4{\times}2{\times}15 = 169-120 = 49$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{13-7}{4}$	$= \dfrac{13+7}{4}$
$= \dfrac{6}{4}$	$= \dfrac{20}{4}$
$= \dfrac{3}{2}$	$= 5$

d) Cherchons les racines de $3x^2-6x+3$:

Le discrimant de ce polynome du second degré a pour valeur :
$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4{\times}3{\times}3 = 36-36 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme du second degré admet une unique racine :
$x = -\dfrac{b}{2{\cdot}a} = -\dfrac{-6}{2{\times}3} = \dfrac{6}{6} = 1$

C.5 On a les transformations algébriques :

$$\begin{aligned} x(x-2)(x+1) &= (x-2)(-7-3x)\\ x(x-2)(x+1)-(x-2)(-7-3x) &= 0\\ (x-2)\big[x(x+1)-(-7-3x)\big] &= 0\\ (x-2)\big(x^2+x+7+3x\big) &= 0\\ (x-2)\big(x^2+4x+7\big) &= 0 \end{aligned}$$

Cherchons les racines du second facteur ; le discriminant de x^2+4x+7 a pour valeur :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4{\times}1{\times}7 = 16-28 = -12 < 0$
Ce discriminant est négatif : ce polynôme n'admet aucune racine.

Pour que le produit $(x-2)\big(x^2+4x+7\big)$ s'annule, il est nécessaire qu'un de ses facteurs s'annule ; seul le premier facteur peut s'annuler pour $x=2$.

L'ensemble des solutions est : $S = \big\{2\big\}$

C.6 On a les transformations algébriques :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} &= 1-2{\cdot}x\\ \frac{x-1}{x+1}-1+2{\cdot}x &= 0\\ \frac{x-1+\big(-1+2{\cdot}x\big)\big(x+1\big)}{x+1} &= 0\\ \frac{x-1-x-1+2{\cdot}x^2+2x}{x+1} &= 0\\ \frac{2{\cdot}x^2+2{\cdot}x-2}{x+1} &= 0 \end{aligned}$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul. Déterminons les racines du numérateur.

Le numérateur a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}2{\times}(-2) = 4 + 16 = 20$$

On a la simplification :
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4{\times}5} = 2\sqrt{5}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2{\times}2} = \frac{2{\cdot}\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2{\times}2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2{\times}2} = \frac{2{\cdot}\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2{\times}2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

C.7

a Le coefficient du second degré de ce polynôme est positif ; cette fonction admet un minimum en :
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{6} = \frac{1}{2}$$
La valeur de ce minimum est de :
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3{\times}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3{\times}\frac{1}{2} + 2 = 3{\times}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3{\times}\frac{1}{2} + 2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = \frac{5}{4}$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

b Le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif ; cette fonction admet un maximum en :
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-2} = -1$$
La valeur de ce maximum est de :
$$g(-1) = -(-1)^2 - 2{\times}(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		$+\infty$
Variation de g	-∞	$\nearrow$	4	$\searrow$	-∞

C.8

a Le polynôme $x^2{-}3x{+}2$ du second degré a pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4{\times}1{\times}2 = 9 - 8 = 1$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-1}{2{\times}1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2{\times}1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi, ce polynôme admet la factorisation suivante :
$$x^2 - 3x + 2 = a{\cdot}\big(x - x_1\big)\big(x - x_2\big) = \big(x-1\big)\big(x-2\big)$$

b Le discriminant du polynôme $-2x^2{-}2x{+}4$ a pour valeur :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4{\times}(-2){\times}4 = 4 + 32 = 36$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, les deux racines suivantes de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-6}{2{\times}(-2)} = \frac{2-6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+6}{2{\times}(-2)} = \frac{2+6}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Il admet la forme factorisée suivante :
$$-2x^2 - 3x - 1 = a{\cdot}\big(x - x_1\big)\big(x - x_2\big)$$
$$= -2\big(x-1\big)\big[x-(-2)\big] = -2\big(x-1\big)\big(x+2\big)$$

c Le trinôme $-x^2{+}2x{-}1$ du second degré admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4{\times}(-1){\times}(-1) = 0$$
Ce polynôme admet une unique racine :
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$$
Il admet pour forme factorisée :
$$-x^2 + 2x - 1 = a{\cdot}\Big(x - x_0\Big)^2 = -\big(x-1\big)^2$$

d Le polynôme $4x^2{+}x{+}3$ admet pour discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4{\times}4{\times}3 = 1 - 48 = -47$$
On en déduit que ce polynôme n'admet pas de forme factorisée.

C.9

a Cherchons les racines de $x^2{+}3x{+}4$

L'étude du discrimant donne :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4{\times}1{\times}4 = -7 < 0$$
Le discriminant de ce polynome est strictement négatif ; il n'admet aucune racine.

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2{+}3x{+}4$		$+$	

b Cherchons les racines de $4x^2{+}3x{-}10$.

L'étude du discrimant donne :
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4{\times}4{\times}(-10) = 169 > 0$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Les racines de ce polynome sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-13}{8} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3+13}{8} = \frac{5}{4}$$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$4x^2+3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) Cherchons les racines de $4x^2-16x+16$.
L'étude du discrimant donne :
$\Delta = b^2-4ac = (-16)^2-4\times4\times16 = 0$

Ce polynôme est nul ; il admet une unique racine :
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{8} = 2$

Le coefficient du terme de degré 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4x^2-16x+16$		$+$	0	$+$	

C.10

(a) Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times(-2)\times3 = 1+24 = 25$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme du second degré admet pour racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1-5}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-1+5}{2\times(-2} = \frac{4}{-4} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le membre de gauche admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2{\cdot}x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

(b) Le membre de gauche est un polynôme du second degré admettant pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-6)^2-4\times3\times(-3) = 36+36 = 72$
On a : $\sqrt{72} = \sqrt{36\times2} = \sqrt{36}\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-6\sqrt{2}}{2\times3} = \frac{6-6\sqrt{2}}{2\times3} = \frac{6{\cdot}(1-\sqrt{2})}{6} = 1-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+6\sqrt{2}}{2\times3} = \frac{6+6\sqrt{2}}{2\times3} = \frac{6{\cdot}(1+\sqrt{2})}{6} = 1+\sqrt{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit que le membre de gauche admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$3{\cdot}x^2-6{\cdot}x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble des solutions de cette inéquation :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2}\,;+\infty\right[$

C.11

(1) Déterminons l'image du nombre 3 par la fonction f :
$f(3) = 3^3-7\times3-6 = 27-21-6 = 0$
On en déduit que 3 est un zéro de la fonction f.

(2) (a) Développons l'expression :
$(x-3)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
$= a{\cdot}x^3+b{\cdot}x+c{\cdot}x-3a{\cdot}x^2-3b{\cdot}x-3c$
$= a{\cdot}x^3+(b-3a){\cdot}x^2+(c-3b){\cdot}x-3c$

(b) En identifiant la première équation et la dernière équation donne :
$a=1 \quad ; \quad c=2$
On vérifie facilement que le triplet $(1\,;3\,;2)$ est solution de ces quatre équations.

L'identification de l'expression de f et celle de la question (2)(a) permet d'obtenir les équations pré-citées.
On en déduit la forme factorisée :
$f(x) = (x-3)(x^2+3x+2)$

(c) Le second facteur étant un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 3^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$
Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines de ce polynôme :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3-1}{2\times1} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3+1}{2\times1} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ainsi, la fonction f admet la forme factorisée :
$f(x) = (x-3)(x^2+3x+2) = (x-3)[x-(-1)][x-(-2)]$
$= (x-3)(x+1)(x+2)$

C.12

- Exprimons la différence $f-g$:

$$f(x)-g(x)=\frac{5}{4x^2+1}-\big(-x+2\big)=\frac{5-\big(-x+2\big)\big(4x^2+1\big)}{4x^2+1}$$
$$=\frac{5-\big(-4x^3-x+8x^2+2\big)}{4x^2+1}=\frac{4x^3-8x^2+x+3}{4x^2+1}$$

- On remarque que 1 est une racine triviale du numérateur précédent :
  $4\times1^3-8\times1^2+1+3=4-8+1+3=0$

  Ainsi, il existe des réels a, b, c réalisant la factorisation :
  $4x^3-8x^2+x+3=\big(x-1\big)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$

  Développons la forme factorisée :
$$\big(x-1\big)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x-a{\cdot}x^2-b{\cdot}x-c$$
$$=a{\cdot}x^3+\big(b-a\big){\cdot}x^2+\big(c-b\big){\cdot}x-c$$

  Par identification avec la forme développée, on en déduit le système suivant :
$$\begin{cases} 4 = a \\ -8 = b-a \\ 1 = c-b \\ 3 = -c \end{cases}$$

  De la première et quatrième équation, on en déduit : $a=4\quad;\quad c=-3$
  On vérifie ensuite que le triplet $\big(4\,;-4\,;-3\big)$ est solution de ce système :

  On en déduit l'expression de la forme factorisée :
$$f(x)-g(x)=\frac{\big(x-1\big)\big(4x^2-4x-3\big)}{4x^2+1}$$

- Le second facteur du numérateur est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
  $\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=\big(-4\big)^2-4\times4\times(-3)=16+48=64$
  On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

  Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-4)-8}{2\times4}=\frac{4-8}{8}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-4)+8}{2\times4}=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

- Le dénominateur $4x^2+1$ est strictement positif pour tout $x\in\mathbb{R}$.
  Le coefficient du terme du second degré étant positif, on en déduit le tableau de signes de ce polynôme et de la différence $f-g$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2-4x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La solution de l'inéquation $f(x)-g(x)>0$ étant l'ensemble :
$\Big]-\frac{1}{2}\,;1\Big[\cup\Big]\frac{3}{2}\,;+\infty\Big[$

On en déduit les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$:

- la courbe $\mathscr{C}_f$ est strictement au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble : $\Big]-\frac{1}{2}\,;1\Big[\cup\Big]\frac{3}{2}\,;+\infty\Big[$
- la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble : $\Big]-\infty\,;-\frac{1}{2}\Big]\cup\Big[1\,;\frac{3}{2}\Big]$

C.13

1. On a le développement suivant :
$$\mathcal{P}=\big(x+1\big){\cdot}\big(2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12\big)$$
$$=2{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2-12{\cdot}x+2{\cdot}x^2+b{\cdot}x-12$$
$$=2{\cdot}x^3+\big(b+2\big){\cdot}x^2+\big(b-12\big){\cdot}x-12$$

Par identification avec la forme développée réduite de $\mathcal{P}$, on obtient le système d'équations ci-dessous :
$$\begin{cases} 2 = 2 \\ b+2 = 7 \\ -7 = b-12 \\ -12 = -12 \end{cases}$$

On en déduit la factorisation :
$\mathcal{P}=\big(x+1\big){\cdot}\big(2{\cdot}x^2+5{\cdot}x-12\big)$

2. Etudions le second facteur de la factorisation. Ce polynome du second degré a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=5^2-4\times2\times(-12)=25+96=121$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{121}=11$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-5-11}{2\times2}=\frac{-16}{4}=-4$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-5+11}{2\times2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2{\cdot}x^2+5{\cdot}x-12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{P}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	