C.1

(a)
- $u_0 = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$
- $u_1 = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$
- $u_2 = \dfrac{2+1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$
- $u_3 = \dfrac{3+1}{3+2} = \dfrac{4}{5}$

(b)
- $u_0 = \sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1}$
- $u_1 = \sqrt{1^2+1+1} = \sqrt{3}$
- $u_2 = \sqrt{2^2+2+1} = \sqrt{7}$
- $u_3 = \sqrt{3^2+3+1} = \sqrt{13}$

(c)
- $u_0 = \dfrac{0-2}{0+1} = -\dfrac{2}{1} = -2$
- $u_1 = \dfrac{1-2}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$
- $u_2 = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$
- $u_3 = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

C.2 Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4
u_n	5	9	17	33	65

C.3

(1) Les cinq premiers termes de la suite ont pour valeur :
- $v_0 = 3$
- $v_1 = \dfrac{1-v_0}{1+v_0} = \dfrac{1-3}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $v_2 = \dfrac{1-v_1}{1+v_1} = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$

  $= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1} = 3$
- $v_3 = \dfrac{1-v_2}{1+v_2} = \dfrac{1-3}{1+3} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $v_4 = \dfrac{1-v_3}{1+v_3} = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$

  $= \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1} = 3$

(2) Les termes de la suite ne prennent que deux valeurs successivement ; comme il a été dit dans la question (1), la suite est périodique de période 2.

C.4 On a :
- $u_0 = -1$
- $u_1 = u_0 + 0 - 2 = -1 + 0 - 2 = -3$
- $u_2 = u_1 + 1 - 2 = -3 + 1 - 2 = -4$
- $u_3 = u_2 + 2 - 2 = -4 + 2 - 2 = -4$

C.5

(1) En exécutant cet algorithme, on observe qu'à la fin de l'exécution du programme, la variable `a` a pour valeur 20.

(2) L'algorithme implémente la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

C.6

(1) En fin d'exécution de l'algorithme, la variable `n` sera affecté du rang du premier terme égal ou dépassant la valeur 1 000.

(2) Pour connaître le rang du premier terme supérieur à 5 000, voici l'algorithme modifié :

```
n ← 0
u ← 2
Tant que  u<5000
    u ← 2× n
    n ← n+1
Fin Tant que
```

C.7

(1) Voici synthétisé ci-dessous, le fonctionnement de l'algorithme :

i	a
0	4
1	8
2	16
3	32
4	64
5	128

Ainsi, les différentes valeurs affectées à la variable `a` sont :
2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 128

(2) Les suites définissant la suite (u_n) sont :
- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2\cdot u_n, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$
- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2\cdot u_{n-1}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$
- $u_n = 2^{n+1}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

C.8

(1) Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-1	-3	-13	-183

(2) L'étude de la différence de deux termes consécutifs donne :
$$u_{n+1} - u_n = \left(u_n - {u_n}^2 - 1\right) - u_n = -{u_n}^2 - 1 < 0$$
Ainsi, la différence de termes consécutifs de la suite est négatif, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

C.9 Etudions la différence $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1}-w_n=\left[2(n+1)-\frac{25}{n+1}\right]-\left(2n-\frac{25}{n}\right)$$
$$=2n+2-\frac{25}{n+1}-2n+\frac{25}{n}=2+\frac{25}{n}-\frac{25}{n+1}$$
$$=2+\frac{25(n+1)}{n(n+1)}-\frac{25n}{n(n+1)}=2+\frac{25(n+1)-25n}{n(n+1)}$$
$$=2+\frac{25}{n(n+1)}\ >\ 0$$

La différence de deux termes de la suite $\big(w_n\big)$ étant positive sur $\mathbb{N}^*$, on en déduit la suite $\big(w_n\big)$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

C.10

(1) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1-(n+1)}{1+(n+1)}-\frac{1-n}{1+n}$$
$$=\frac{1-n-1}{n+2}-\frac{1-n}{1+n}=\frac{-n}{n+2}-\frac{1-n}{1+n}$$
$$=\frac{-n(1+n)}{(n+2)(1+n)}-\frac{(1-n)(n+2)}{(1+n)(n+2)}$$
$$=\frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)}-\frac{n+2-n^2-2n}{(1+n)(n+2)}$$
$$=\frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)}-\frac{2-n^2-n}{(1+n)(n+2)}$$
$$=\frac{-n-n^2-2+n^2+n}{(1+n)(n+2)}=\frac{-2}{(1+n)(n+2)}$$

(2) Pour tout entier naturel n, pour le quotient exprimant la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$:

- le numérateur est strictement négatif ;
- le dénominateur du quotient est strictement positif pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On en déduit le signe du quotient :

$$\frac{-2}{(1+n)(n+2)}<0$$
$$u_{n+1}-u_n<0$$
$$u_{n+1}<u_n$$

Ainsi, la suite $\big(u_n\big)$ est strictement décroissante.

C.11

(1) On a la simplification :

$$u_{n+1}-u_n=(n{+}1)^3-2(n{+}1)^2-3(n{+}1)-\big(n^3{-}2n^2{-}3n\big)$$
$$=(n{+}1)\big(n^2{+}2n{+}1\big)-2\big(n^2{+}2n{+}1\big)-3(n{+}1)-n^3{+}2n^2{+}3n$$
$$=\big(n^3{+}2n^2{+}n{+}n^2{+}2n{+}1\big)\text{-}2n^2\text{-}4n\text{-}2\text{-}3n\text{-}3\text{-}n^3{+}2n^2{+}3n$$
$$=n^3{+}2n^2{+}n{+}n^2{+}2n{+}1-2n^2-4n-2-3n-3-n^3{+}2n^2{+}3n$$
$$=3n^2-n-4$$

(2) Etudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times3\times(-4)=(-1)^2-48=49$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-7}{2\times3}=-1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+7}{2\times3}=\frac{4}{3}\approx 1{,}3$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2{-}x{-}4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutif est positif à partir du rang 2 : $\big(u_n\big)$ est croissante à partir du rang 2.

C.12 Pour connaître le sens de variation de la suite $\big(u_n\big)$, nous allons étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+10}{2(n+1)}-\frac{n^2+10}{2n}$$
$$=\frac{n^2+2n+1+10}{2(n+1)}-\frac{n^2+10}{2n}$$
$$=\frac{n\cdot\big(n^2+2n+11\big)-\big(n^2+10\big)(n+1)}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$
$$=\frac{n^3+2n^2+11n-\big(n^3+10n+n^2+10\big)}{2\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{n^2+n-10}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$

L'entier n étant strictement positif, le dénominateur du quotient précédent est nécessairement positif ; ainsi, le signe du quotient ne dépend que du signe du numérateur.

Etudions le polynôme $x^2{+}x{-}10$; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times1\times(-10)=1+40=41$$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}\approx-3{,}7$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}\approx 2{,}7$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, nous allons obtenir le tableau de signes de ce polynôme.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$x^2{+}x{-}10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on obtient le tableau de signes pour la différence $u_{n+1}{-}u_n$:

n	0		2		3		$+\infty$
$u_{n+1}{-}u_n$		$-$				$+$	

Ainsi, la suite $\big(u_n\big)$ est une suite croissante à partir du rang 3.

