

La Trigonométrie – 1ère spé maths

A) Les Angles orientés

1) Le Radian

Définition : Soit α_{deg} un angle en degrés, la mesure de α_{rad} en radians est donnée par l'expression : $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180^\circ} \times \alpha_{deg}$

exemple : obtient le tableau de conversions ci-dessous

deg	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
rad	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

2) Le cercle trigonométrique

Définition : On appelle « Cercle trigonométrique » le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon $r=1$ (unité) où les angles orientés et notés en radians,

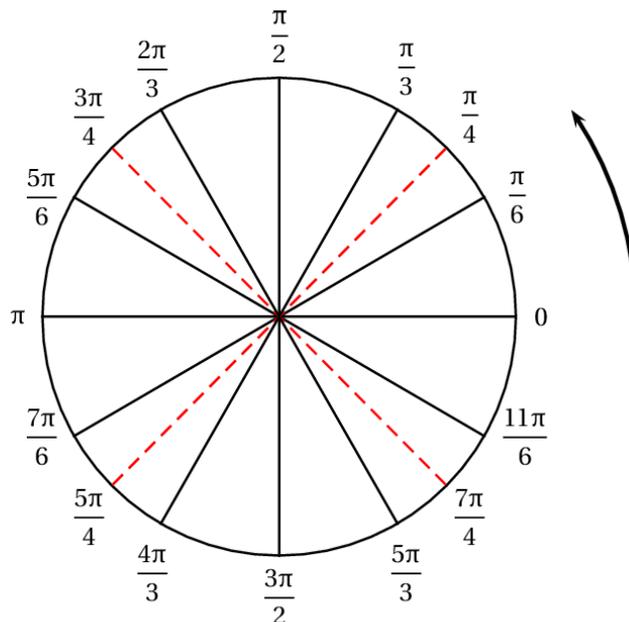
Note : l'orientation positive correspond au sens contraire de la montre

Définition : On appelle « Point image » noté $M(\alpha)$ d'un angle en radian α le point du cercle trigonométrique associé à cet angle

exemple : On obtient les points images des valeurs remarquables ci-contre

On pourra utiliser les techniques de construction :

- $A(\frac{\pi}{3})$ a pour abscisse $x=0,5$
- $B(\frac{\pi}{6})$ a pour ordonnée $y=0,5$
- $C(\frac{\pi}{4})$ a pour coordonnées $x=y$



3) Mesure principale

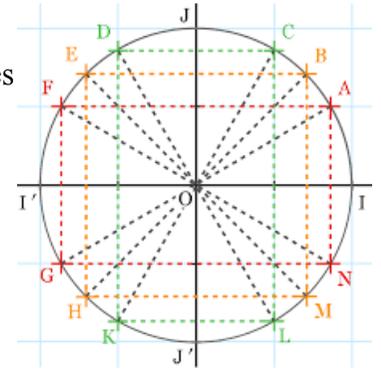
Définition : On appelle « mesure principale » d'un angle α la mesure en radian telle que $\alpha \in]-\pi; \pi]$

exemple : On donne les points images ci-contre
Les mesures principales associées à ces points images sont : $I(0)$, $A(\frac{\pi}{6})$, $B(\frac{\pi}{4})$, $C(\frac{\pi}{3})$,

$J(\frac{\pi}{2})$, $D(\frac{2\pi}{3})$, $E(\frac{3\pi}{4})$, $F(\frac{5\pi}{6})$,

$I'(\pi)$, $N(\frac{-\pi}{6})$, $M(\frac{-\pi}{4})$, $L(\frac{-\pi}{3})$,

$J'(\frac{-\pi}{2})$, $K(\frac{-2\pi}{3})$, $H(\frac{-3\pi}{4})$, $G(\frac{-5\pi}{6})$

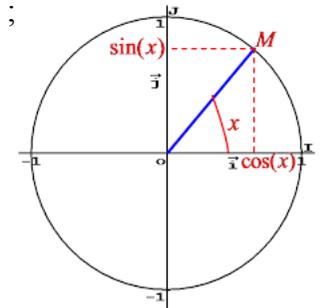


B) Les Lignes Trigonométriques

1) Cosinus & Sinus

Définition : On se place dans le Cercle Trigonométrique ; soit x un angle orienté en radian et $M(x)$ son point image sur le cercle ; on définit :

- Le « Cosinus de x » l'abscisse du point M
- Le « Sinus de x » l'ordonnée du point M



explications : Notons P le projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox) et Q le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oy)

Alors $\cos(x) = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = x_M$ et $\sin(x) = \frac{PM}{OM} = \frac{OQ}{1} = y_M$

2) Lignes trigonométriques usuelles

Propriétés : les lignes trigonométriques des mesures principales sont données dans le tableau ci-dessous

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

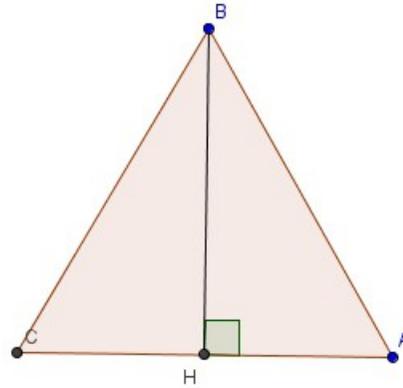
Preuves : Pour les valeurs $\alpha \in \{-\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}; \pi\}$ les lignes trigonométriques se déduisent facilement ; pour les valeurs $\alpha \in \{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\}$ on se place dans un triangle équilatéral de côté a

$$\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\widehat{BAH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

de même $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

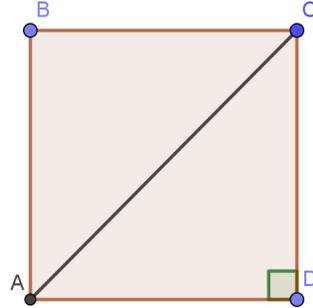


on se place dans un carré de côté a

$$\cos(\widehat{CAD}) = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\widehat{CAD}) = \frac{CD}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



C) Les Relations Trigonométriques

1) Relations de symétrie

Propriétés : Soit $x \in]-\pi; \pi]$ alors on a les relations suivantes

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

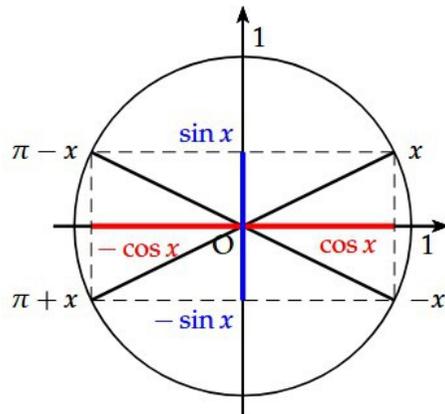
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$



2) Relations de déphasages

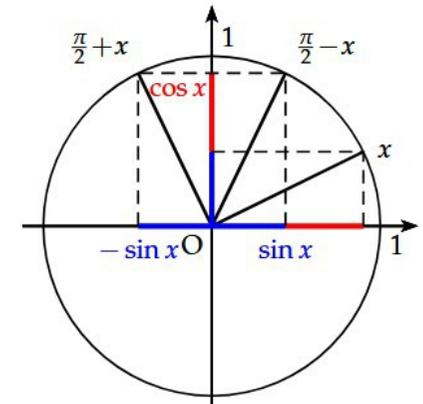
Propriétés : Soit $x \in]-\pi; \pi]$ alors on a les relations suivantes

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$

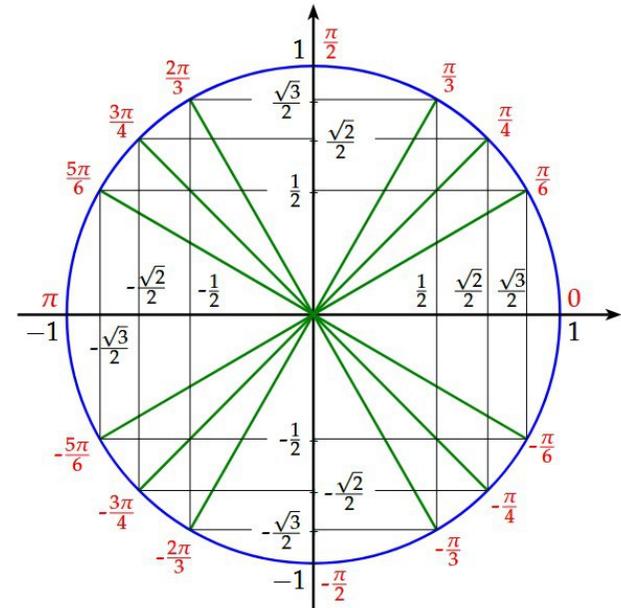


3) Lignes trigonométriques généralisées

Propriétés : les lignes trigonométriques des mesures principales généralisées sont

Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

On retiendra tous ces résultats dans le cercle trigonométrique



D) Équations trigonométriques

1) Les équations avec COS

Propriété : Soit $x \in]-\pi; \pi]$ alors on a les propriétés générales suivantes
 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$; $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Propriété : Soit $x \in]-\pi; \pi]$ et soit $a \in [-1; 1]$ alors les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont $x = a[2\pi]$ ou $x = -a[2\pi]$

Notation : on dit que $x = y[n]$ si il existe un entier relatif k tel que $x = y + kn$; on lit « x est égal à y modulo n »

exemples : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I donné

- $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $I = [0; \frac{\pi}{2}]$
- $\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ avec $I = [-\pi; 0]$
- $\cos(x) = \frac{3}{5}$ avec $I = [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

2) Les équations avec SIN

Propriété : Soit $x \in]-\pi; \pi]$ et soit $a \in [-1; 1]$ alors les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont $x = a[2\pi]$ ou $x = \pi - a[2\pi]$

exemples : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I donné

- $\sin(x) = \frac{-1}{2}$ avec $I = [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
- $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I = [\frac{\pi}{2}; \pi]$
- $\sin(x) = \frac{-3}{5}$ avec $I = [-\pi; 0]$

E) Études des fonctions trigonométriques

1) La fonction COS

Définition : la « fonction COSINUS » est définie par : $f(x) = \cos(x)$
 pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x) \in [-1; 1]$

Propriété : La fonction « COSINUS » est paire sur \mathbb{R} : $f(-x) = f(x)$

Propriété : La fonction « COSINUS » est 2π -périodique sur \mathbb{R} :
 $f(x + 2k\pi) = f(x)$ pour tout entier relatif k

Propriété : La fonction « COSINUS » est dérivable sur \mathbb{R} : $f'(x) = -\sin(x)$
 On déduit le tableau de variations ci-dessous

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos' x$	0	-	
$\cos x$	1	0	-1

2) La fonction SIN

Définition : la « fonction SINUS » est définie par : $g(x) = \sin(x)$
 pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x) \in [-1; 1]$

Propriété : La fonction « SINUS » est impaire sur \mathbb{R} : $g(-x) = -g(x)$

Propriété : La fonction « SINUS » est 2π -périodique sur \mathbb{R} :
 $g(x + 2k\pi) = g(x)$ pour tout entier relatif k

Propriété : La fonction « SINUS » est dérivable sur \mathbb{R} : $g'(x) = \cos(x)$
 On déduit le tableau de variations ci-dessous

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x$	+	0	-
$\sin x$	0	1	0

