Équations Bicarrées – 1ère spécialité maths

Résoudre les équations bicarrées suivantes:

1. $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

2. $-4x^4 - x^2 + \frac{1}{2} = 0$.

3. $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$.

4. $2x^4 - 13x^2 - 7 = 0$.

---

1. Résolvons l'équation $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$:

- L'ensemble de définition de $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$ est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- Procédons au changement de variable: $X = x^2$, avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Dans ces conditions: $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0 \iff 3X^2 - 7X + 2 = 0$.

$(aX^2 + bX + c = 0)$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est: $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 = (5)^2 > 0$.

Comme > 0, l'équation admet 2 racines distinctes: $\bullet\ X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\bullet\ X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici: $\bullet\ X_1 = \frac{7 - 5}{6} = \frac{1}{3}$

$\bullet\ X_2 = \frac{7 + 5}{6} = 2$.

L'équation $3X^2 - 7X + 2 = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

$$X_1 = \frac{1}{3} \text{ et } X_2 = 2$$

- Or: $X = x^2$ cad $x = \pm\sqrt{X}$.

L'équation $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ admet donc 4 solutions distinctes:

- $x_1 = \sqrt{X_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x_1' = -\sqrt{X_1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- $x_2 = \sqrt{X_2} = \sqrt{2}$
- $x_2' = -\sqrt{X_2} = -\sqrt{2}$.

2. Résolvons l'équation $-4x^4 - x^2 + \frac{1}{2} = 0$:

- L'ensemble de définition de $f(x) = -4x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$ est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- Procédons au changement de variable: $X = x^2$, avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Dans ces conditions: $-4x^4 - x^2 + \frac{1}{2} = 0 \iff -4X^2 - X + \frac{1}{2} = 0$.

$(aX^2 + bX + c = 0)$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-4) \times \frac{1}{2} = 9 = (3)^2 > 0$.

Comme > 0, **l'équation admet 2 racines distinctes**: $\bullet\ X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\bullet\ X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ainsi ici: $\bullet\ X_1 = \frac{1-3}{-8} = \frac{1}{4}$

$\bullet\ X_2 = \frac{1+3}{-8} = -\frac{1}{2}$.

L'équation $-4X^2 - X + \frac{1}{2} = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

$$X_1 = \frac{1}{4} \text{ et } X_2 = -\frac{1}{2}.$$

• Or: $X = x^2$ cad $x = \pm\sqrt{X}$.

L'équation $-4x^4 - x^2 + \frac{1}{2} = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

$\bullet\ x_1 = \sqrt{X_1} = \frac{1}{2}$

$\bullet\ x_1' = -\sqrt{X_1} = -\frac{1}{2}$.

. Résolvons l'équation $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$:

• L'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}$ est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• Procédons au changement de variable: $X = x^2$, avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Dans ces conditions: $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0 \iff \sqrt{2}X^2 - 4\sqrt{2}X + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$.

$(aX^2 + bX + c = 0)$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est: $\Delta = (-4\sqrt{2})^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Comme > 0, **l'équation admet une solution unique**: $X_1 = X_2 = -\frac{b}{2a}$.

Ainsi ici: $X_1 = X_2 = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$.

L'équation $\sqrt{2}X^2 - 4\sqrt{2}X + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$ admet donc 1 racine double: $X_1 = X_2 = 2$.

• Or: $X = x^2$ cad $x = \pm\sqrt{X}$.

L'équation $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}x^2 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

$\bullet\ x = \sqrt{2}$

$\bullet\ x' = -\sqrt{2}$.

4. Résolvons l'équation $2x^4 - 13x^2 - 7 = 0$:

• L'ensemble de définition de $f(x) = 2x^4 - 13x^2 - 7$ est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• Procédons au changement de variable: $X = x^2$, avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Dans ces conditions: $2x^4 - 13x^2 - 7 = 0 \iff 2X^2 - 13X - 7 = 0.$

$(aX^2 + bX + c = 0)$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est: $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 225 = (15)^2 > 0.$

Comme > 0, l'équation admet 2 racines distinctes: • $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

• $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$

Ainsi ici: • $X_1 = \dfrac{13 - 15}{4} = -\dfrac{1}{2}$

• $X_2 = \dfrac{13 + 15}{4} = 7.$

L'équation $2X^2 - 13X - 7 = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

$$X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 7.$$

• Or: $X = x^2$ cad $x = \pm\sqrt{X}.$

Nous ne retiendrons pas la solution $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ car: $x^2 = -\dfrac{1}{2}$ est impossible.

L'équation $2x^4 - 13x^2 - 7 = 0$ admet donc 2 solutions distinctes:

• $x_2 = \sqrt{X_2} = \sqrt{7}$

• $x_2' = -\sqrt{X_2} = -\sqrt{7}.$
