1ère spé **Exercices & Problèmes – Polynômes degré 2 - *Corrigé*** **Déc 2023**

Ex 1 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $5x^2-2mx+m=0$ admette -2 comme solution et déterminer l'autre solution de l'équation

Corrigé : $5\times 4+4m+m=0$ donc $5m=-20$ donc $m=-4$
ainsi l'équation est (E) : $5x^2+8x-4=0$ donc $x_1=-2$ et $x_2=0{,}4$

Ex 2 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $mx^2-12x+9=0$ admette une racine double

Corrigé : $\Delta=0$ donc $144-36m=0$ donc $m=4$ et $x_0=1{,}5$

Ex 3 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $2x^2+4x+m=0$ n'admette aucune solution dans $\mathbb{R}$

Corrigé : $\Delta<0$ donc $16-8m<0$ donc $m>2$

Ex 4 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $x^2+mx+m+1=0$ admette une racine double

Corrigé : $\Delta=0$ donc $m^2-4m-1=0$ donc $\Delta_m=20>0$
donc $m_1=2-\sqrt{5}$ et $m_2=2+\sqrt{5}$

Ex 5 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $2x^2+mx+2=0$ n'admette aucune solution dans $\mathbb{R}$

Corrigé : $\Delta<0$ donc $m^2-16<0$ donc $m\in]-4\,;4[$

Ex 6 : Déterminer la valeur de *m* pour que l'équation $mx^2+(m-1)x-2=0$ admette une racine double

Corrigé : $\Delta=0$ donc $(m-1)^2+8m=0$ donc $m^2+6m+1=0$
ainsi $\Delta_m=32>0$ donc $m_1=-3-2\sqrt{2}$ et $m_2=-3+2\sqrt{2}$

Ex 7 : On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^4-x^2-6=0$
Poser le changement de variable $X=x^2$ puis résoudre l'équation $X^2-X-6=0$ et en déduire les solutions de (E)

Corrigé : on pose $X=x^2$ donc (E) devient $X^2-X-6=0$ on obtient $X=-2$ ou $X=3$ donc $x^2=-2$ ou $x^2=3$ ainsi $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

Ex 8 : Si on augmente de 2 cm la longueur de l'arête d'un cube, son volume augmente alors de 2402 cm³ ; combien mesure l'arête de ce cube ?

Corrigé : soit *x* la valeur de l'arête de ce cube donc $(x+2)^3=x^3+2402$
or $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

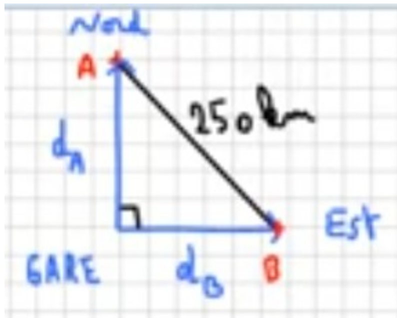
donc on obtient $x^3+6x^2+12x+8=x^3+2402$
donc cela revient à l'équation (E) : $6x^2+12x-2394=0$
soit encore (E) : $x^2+2x-399=0$ on obtient $x=19$ ou $x=-21$
finalement l'arête du cube vaut 19 cm

Ex 9 : Quelles sont les dimensions *x* et *y* d'un rectangle de périmètre 34 cm et d'aire 60 cm² ?

Corrigé : on obtient le système $\begin{cases}2(x+y)=34\\ xy=60\end{cases}$ donc $\begin{cases}x+y=17\\ xy=60\end{cases}$
ainsi *x* et *y* sont solutions de l'équation $X^2-17X+60=0$
donc $X=5$ ou $X=12$ ainsi les dimensions sont $x=5\,cm$ et $y=12\,cm$

Ex 10 : Deux trains A et B partent en même temps d'une même gare ; l'un vers le Nord et l'autre vers l'Est ; le train A se déplace à 25 km/h de plus que le train B
Après 2 heures ils sont à 250 km de distance l'un de l'autre ;
Déterminer la vitesse moyenne de chaque train

Corrigé : soit v_A la vitesse moyenne du train A et v_B celle du train B ; on donne le schéma ci-contre

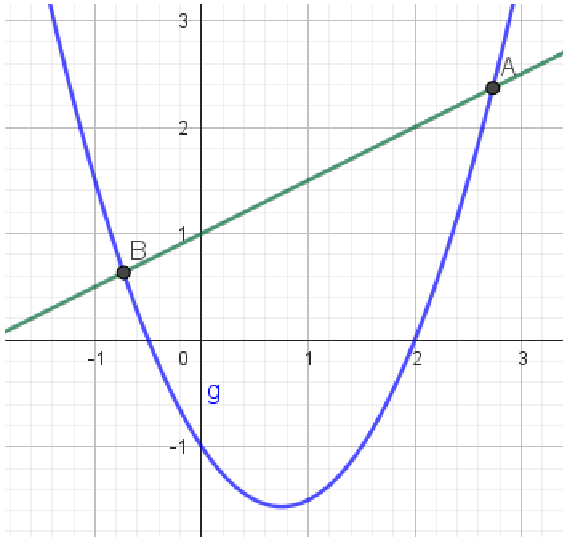


ainsi on déduit que $v_A=v_B+25$
avec $d_A=2v_A$ et $d_B=2v_B$ (car $d=v\times t$)
de plus $d_A^2+d_B^2=250^2$

donc $4v_A^2+4v_B^2=62500$
donc $v_A^2+v_B^2=15625$
donc $(v_B+25)^2+v_B^2=15625$
donc $v_B^2+50v_B+625+v_B^2=15625$
donc $2v_B^2+50v_B-15000=0$
donc $v_B^2+25v_B-7500=0$

on déduit que $v_B=75$ (la solution $v_B=-100$ est impossible !)
d'où $v_A=100$; donc le train roule à 100 km/h et le train B roule à 75 km/h

Ex 11 : On considère la droite (d) d'équation $y=0,5x+1$ et la parabole (P) d'équation $y=x^2-1,5x-1$; déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et la parabole (P)



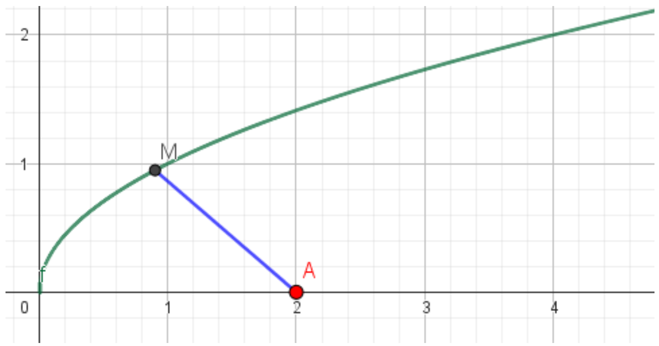
Corrigé : on a le graphique ci-contre les coordonnées $(x;y)$ des points A et B vérifient l'équation
$x^2-1,5x-1=0,5x+1$
donc $x^2-2x-2=0$
on obtient $\Delta=12>0$
donc $x_1=1-\sqrt{3}$ ou $x_2=1+\sqrt{3}$

donc on déduit que :
$A\left(1+\sqrt{3};\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ et
$B\left(1-\sqrt{3};\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

Ex 12 : Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{5x-4}{-2x^2-3x+2}$; déterminer le domaine de définition de *f* noté D_f

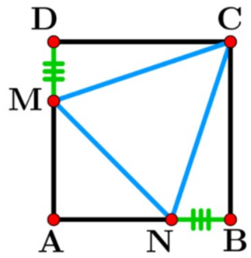
Corrigé : *f* est défiie si $-2x^2-3x+2\neq 0$ donc $x^2+1,5x-1\neq 0$
avec la méthode du discriminant on déduit que $x\neq -2$ et $x\neq 0,5$
donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;0,5\}$

Ex 13 : Dans un repère orthonormé on a tracé la courbe C_f de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$; on donne le point $A(2;0)$; déterminer la distance minimale du point A à la courbe C_f



Corrigé : Soit $M(x;\sqrt{x})$ un point mobile sur C_f
ainsi $AM^2=(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2$
soit $AM^2=x^2-3x+4$
la fonction $f(x)=x^2-3x+4$
admet un minimum en $x=1,5$
donc la distance minimale est
$AM=\sqrt{f(1,5)}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Ex 14 : $ABCD$ est un carré de côté 1 ; on note $DM=x$ et $CM=y$; déterminer la valeur de x pour que le triangle CMN soit équilatéral et en déduire la valeur de y



Corrigé : on a $CD^2+DM^2=CM^2$ et $AM^2+AN^2=MN^2$
or CMN est équilatéral donc $CM^2=MN^2=CN^2$
donc $1+x^2=(1-x)^2+(1-x)^2$
donc $2(1-x)^2=x^2+1$ donc $2(x^2-2x+1)=x^2+1$
donc $x^2-4x+1=0$ donc $x=2-\sqrt{3}$ ou $x=2+\sqrt{3}$
or $0<x<1$ donc la seule solution est $x=2-\sqrt{3}$ d'où $y=\sqrt{x^2+1}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

Ex 15 : Dans chaque cas déterminer l'expression d'un polynôme P de degré 2 tel que :

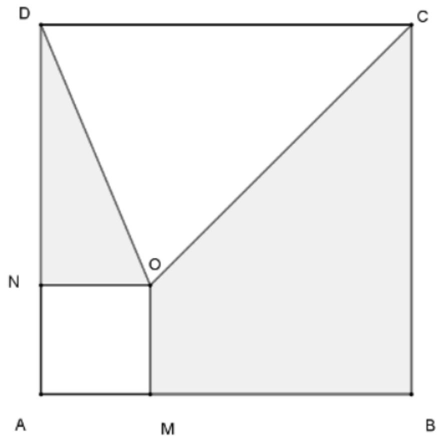
a) P admet pour racines -1 et 3
b) P admet pour racines 0 et -3 et admet un maximum sur $\mathbb{R}$
c) P admet une racine double égale à 2 et admet un minimum sur $\mathbb{R}$
d) P n'admet aucune racine et admet un maximum sur $\mathbb{R}$
e) P admet un maximum en 3 qui vaut 4

Corrigé : on obtient les propositions suivantes :

a) $P(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$
b) $P(x)=-(x-0)(x+3)=-x^2-3x$
c) $P(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4$
d) $P(x)=-x^2+x-1$
e) $P(x)=4-(x-3)^2=-x^2+6x-5$

Ex 16 : $ABCD$ est un carré de côté 10 cm ; $M\in[AB]$ et $N\in[AD]$; $AMON$ est un carré de côté x

a) Montrer que l'aire grisée est : $A(x)=-x^2+5x+50$
b) Déterminer la valeur de x pour que cette aire soit maximale

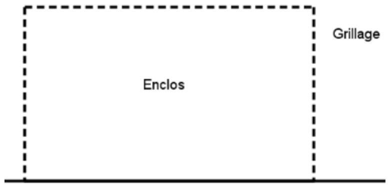


Corrigé : l'aire grisée est :
$A(x)=\dfrac{NO\times ND}{2}+\dfrac{(MO+BC)\times BM}{2}$
donc $A(x)=0,5x(10-x)+0,5(x+10)(10-x)$
donc $A(x)=-0,5x^2+5x+0,5(100-x^2)$
donc $A(x)=-x^2+5x+50$

on étudie les variations de cette fonction A sur l'intervalle $[0;10]$
la valeur maximale de A est obtenue pour $x=2{,}5$
l'aire maximale vaut alors $A(2{,}5)=56{,}25\,cm^2$

x	0		$\frac{5}{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	50	$\nearrow$	$\frac{225}{4}$	$\searrow$	0

Ex 17 : On souhaite délimiter un enclos rectangulaire à l'aide d'une clôture en grillage de 80 m de long ; quelles sont les dimensons de l'enclos pour obtenir une surface maximale ?



Corrigé : soit x la largeur et y la longueur de cet enclos ; on odéduit que :
$2x+y=80$ et on pose $A(x)=xy$ l'aire de l'enclos
donc $A(x)=x(80-2x)=-2x^2+80x$

on étudie les variations de cette fonction A sur l'intervalle $[0;40]$
la valeur maximale de A est obtenue pour $x=20$
l'aire maximale vaut alors $A(20)=800\,m^2$
les dimensions de l'enclos sont :
$largeur=20\,m$ et $longueur=40\,m$

x	0		20		40
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	800	$\searrow$	0
