Systèmes non linéaires – 1ère spécialité maths

Résoudre les systèmes suivants où x et y sont des réels:

1. $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$.
3. $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-1 \end{cases}$.
5. $\begin{cases} 3(x+y)=6\sqrt{5} \\ 7xy=7 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=-18 \end{cases}$.
4. $\begin{cases} 2x+2y=24 \\ xy=36 \end{cases}$.
6. $\begin{cases} x+y=-7 \\ 3xy=30 \end{cases}$.

---

1. Résolvons le système $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2-x \\ x(2-x)=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2-x \\ -x^2+2x+3=0 \end{cases}.$$

Soit l'équation $-x^2+2x+3=0$. $(ax^2+bx+c=0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2-4ac$:

$\Delta = 2^2-4\times(-1)\times 3 = 16 = (4)^2 > 0.$

Ainsi ici: • $x_1 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3$

• $x_2 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1.$

Au total, 2 couples solutions: • $x_1=3$ et $y_1=2-3=-1$

• $x_2=-1$ et $y_2=2-(-1)=3.$

2. Résolvons le système $\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=-18 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ xy=-18 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-7-x \\ x(-7-x)=-18 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-7-x \\ x^2+7x-18=0 \end{cases}.$$

Soit l'équation $x^2+7x-18=0$. $(ax^2+bx+c=0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2-4ac$:

$\Delta = 7^2-4\times 1\times(-18) = 121 = (11)^2 > 0.$

Ainsi ici: • $x_1 = \dfrac{-7-11}{2} = -9$

• $x_2 = \dfrac{-7+11}{2} = 2.$

Au total, 2 couples solutions: • $x_1=-9$ et $y_1=-7-(-9)=2$

• $x_2=2$ et $y_2=-7-2=-9.$

3. Résolvons le système $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-1 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-x \\ x(1-x)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-x \\ -x^2+x+1=0 \end{cases}$$

Soit l'équation $-x^2+x+1=0$. $(ax^2+bx+c=0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2-4ac$:

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0.$

Ainsi ici:

- $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Au total, 2 couples solutions:

- $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $y_1 = 1 - x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $y_2 = 1 - x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

4. Résolvons le système $\begin{cases} 2x+2y=24 \\ xy=36 \end{cases}$:

$$\begin{cases} 2x+2y=24 \\ xy=36 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=12 \\ xy=36 \end{cases} \iff \begin{cases} y=12-x \\ x(12-x)=36 \end{cases} \iff \begin{cases} y=12-x \\ -x^2+12x-36=0 \end{cases}.$$

Soit l'équation $-x^2+12x-36=0$. $(ax^2+bx+c=0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2-4ac$:

$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-36) = 0.$

Ainsi ici: $x_1 = x_2 = \dfrac{-12}{-2} = 6.$

Au total, 1 couple solution: $x=6$ et $y=12-6=6.$

5. Résolvons le système $\begin{cases} 3(x+y)=6\sqrt{5} \\ 7xy=7 \end{cases}$:

$$\begin{cases} 3(x+y)=6\sqrt{5} \\ 7xy=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=2\sqrt{5} \\ xy=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2\sqrt{5}-x \\ x(2\sqrt{5}-x)=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=2\sqrt{5}-x \\ -x^2+2\sqrt{5}\,x-1=0 \end{cases}.$$

Soit l'équation $-x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 1 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (2\sqrt{5})^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0.$

Ainsi ici: $\bullet\ x_1 = \dfrac{-2\sqrt{5} - 4}{-2} = \sqrt{5} + 2$

$\bullet\ x_2 = \dfrac{-2\sqrt{5} + 4}{-2} = \sqrt{5} - 2.$

Au total, 2 couples solutions: $\bullet\ x_1 = \sqrt{5} + 2$ et $y_1 = 2\sqrt{5} - x_1 = \sqrt{5} - 2$

$\bullet\ x_2 = \sqrt{5} - 2$ et $y_2 = 2\sqrt{5} - x_2 = \sqrt{5} + 2.$

6. Résolvons le système $\begin{cases} x + y = -7 \\ 3xy = 30 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x + y = -7 \\ 3xy = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 - x \\ x(-7 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 - x \\ x^2 + 7x + 10 = 0 \end{cases}.$$

Soit l'équation $x^2 + 7x + 10 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 = (3)^2 > 0.$

Ainsi ici: $\bullet\ x_1 = \dfrac{-7 - 3}{2} = -5$

$\bullet\ x_2 = \dfrac{-7 + 3}{2} = -2.$

Au total, 2 couples solutions: $\bullet\ x_1 = -5$ et $y_1 = -7 - x_1 = -2$

$\bullet\ x_2 = -2$ et $y_2 = -7 - x_2 = -5.$
