C.1

(a)
- $u_0 = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$
- $u_1 = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$
- $u_2 = \dfrac{2+1}{2+2} = \dfrac{3}{4}$
- $u_3 = \dfrac{3+1}{3+2} = \dfrac{4}{5}$

(b)
- $u_0 = \sqrt{0^2+0+1} = \sqrt{1}$
- $u_1 = \sqrt{1^2+1+1} = \sqrt{3}$
- $u_2 = \sqrt{2^2+2+1} = \sqrt{7}$
- $u_3 = \sqrt{3^2+3+1} = \sqrt{13}$

(c)
- $u_0 = \dfrac{0-2}{0+1} = -\dfrac{2}{1} = -2$
- $u_1 = \dfrac{1-2}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$
- $u_2 = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$
- $u_3 = \dfrac{3-2}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

C.2

(a)
- $u_0 = 3$
- $u_1 = 2{\cdot}u_0 - 2 = 2\times3 - 2 = 6-2 = 4$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 - 2 = 2\times4 - 2 = 8-2 = 6$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 - 2 = 2\times6 - 2 = 12-2 = 10$

(b)
- $u_0 = 1$
- $u_1 = 2{\cdot}u_0 - 2 = 2\times1 - 2 = 0$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 - 2 = 2\times0 - 2 = -2$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 - 2 = 2\times(-2) - 2 = -6$

(c)
- $u_0 = 2$
- $u_1 = \dfrac{u_0-2}{u_0+1} = \dfrac{2-2}{2+1} = 0$
- $u_2 = \dfrac{u_1-2}{u_1+1} = \dfrac{0-2}{0+1} = -2$
- $u_3 = \dfrac{u_2-2}{u_2+1} = \dfrac{-2-2}{-2+1} = \dfrac{-4}{-1} = 4$

C.3 Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 3$
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 + u_0 = 2\times1 + 3 = 5$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 + u_1 = 2\times5 + 1 = 11$
- $u_4 = 2{\cdot}u_3 + u_2 = 2\times11 + 5 = 27$

C.4 Etudions la différence $w_{n+1} - w_n$:

$$w_{n+1} - w_n = \Big[2(n+1) - \frac{25}{n+1}\Big] - \Big(2n - \frac{25}{n}\Big)$$
$$= 2n + 2 - \frac{25}{n+1} - 2n + \frac{25}{n} = 2 + \frac{25}{n} - \frac{25}{n+1}$$
$$= 2 + \frac{25(n+1)}{n(n+1)} - \frac{25n}{n(n+1)} = 2 + \frac{25(n+1) - 25n}{n(n+1)}$$
$$= 2 + \frac{25}{n(n+1)} \ > \ 0$$

La différence de deux termes de la suite (w_n) étant positive sur $\mathbb{N}^*$, on en déduit la suite (w_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

C.5 Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), nous allons étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n^2+2n+1+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n{\cdot}(n^2+2n+11) - (n^2+10)(n+1)}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)}$$
$$= \frac{n^3+2n^2+11n - (n^3+10n+n^2+10)}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)} = \frac{n^2+n-10}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)}$$

L'entier n étant strictement positif, le dénominateur du quotient précédent est nécessairement positif ; ainsi, le signe du quotient ne dépend que du signe du numérateur.

Etudions le polynôme x^2+x-10 ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times1\times(-10) = 1 + 40 = 41$$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \approx -3{,}7$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \approx 2{,}7$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, nous allons obtenir le tableau de signes de ce polynôme.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-10		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on obtient le tableau de signes pour la différence $u_{n+1} - u_n$:

n	0		2		3		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$				$+$	

Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante à partir du rang 3.

C.6 Les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Comparons le quotient de deux termes positifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3\cdot(n+1)}}{\frac{2^n}{3\cdot n}} = \frac{2^{n+1}}{3\cdot(n+1)}\times\frac{3\cdot n}{2^n} = \frac{2\cdot n}{n+1}$$
$$= \frac{(n+1)+(n-1)}{n+1} = \frac{n+1}{n+1}+\frac{n-1}{n+1} = 1+\frac{n-1}{n+1}$$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$n-1 \geqslant 0$$
$$\frac{n-1}{n+1} \geqslant 0$$
$$1+\frac{n-1}{n+1} \geqslant 1$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

La suite (u_n) est croissante pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

C.7

1. Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \dfrac{2}{1+\frac{2}{u_0}} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{1}} = \dfrac{2}{3}$
- $u_2 = \dfrac{2}{1+\frac{2}{u_1}} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2}{1+2\times\frac{3}{2}}$
  $= \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
- $u_3 = \dfrac{2}{1+\frac{2}{u_2}} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2}{1+2\times 2} = \dfrac{2}{5}$
- $u_4 = \dfrac{2}{1+\frac{2}{u_3}} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{\frac{2}{5}}} = \dfrac{2}{1+2\times\frac{5}{2}} = \dfrac{2}{1+5} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

2. On remarque la comparaison : $u_0>u_1>u_2>u_3>u_4$
On peut conjecturer que la suite (u_n) est une suite décroissante.

3. On remarque les expressions des premiers termes de la suite (u_n) :
$u_0=\dfrac{2}{2}$; $u_1=\dfrac{2}{3}$; $u_2=\dfrac{2}{4}$; $u_3=\dfrac{2}{5}$; $u_4=\dfrac{2}{6}$
On conjecture que le terme de rang n de la suite (u_n) admet pour expression : $u_n=\dfrac{2}{n+2}$

C.8

1. On a la simplification :

$$u_{n+1}-u_n = (n+1)^3-2(n+1)^2-3(n+1)-\big(n^3-2n^2-3n\big)$$
$$=(n+1)\big(n^2+2n+1\big)-2(n^2+2n+1)-3(n+1)-n^3+2n^2+3n$$
$$=\big(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1\big)\text{-}2n^2\text{-}4n\text{-}2\text{-}3n\text{-}3\text{-}n^3+2n^2+3n$$
$$=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-2n^2-4n-2-3n-3-n^3+2n^2+3n$$
$$=3n^2-n-4$$

2. Etudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :
$$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times3\times(-4) = (-1)^2-48 = 49$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2\times3} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2\times3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutif est positif à partir du rang 2 : (u_n) est croissante à partir du rang 2.

C.9 La suite (u_n) est définie explicitement à l'aide de la fonction f dont l'image de x est donnée par la relation :
$$f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}_+^*$$
L'expression de la fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v où :
$$u(x)=x^2-1 \quad ; \quad v(x)=\sqrt{x}$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x)=2x \quad ; \quad v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{2x\sqrt{x}-(x^2+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\big(\sqrt{x}\big)^2}$$
$$= \frac{\frac{2x\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-(x^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{4x^2-x^2+1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{3x^2+1}{2x\sqrt{x}}$$
Le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont positifs sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la dérivée f' est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.