C.1

(a) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$f(2+h) = \big(2+h\big)^2 - 3\cdot\big(2+h\big) + 2$$
$$= 2^2 + 4\cdot h + h^2 - 6 - 3\cdot h + 2$$
$$= 4 + h + h^2 - 4 = h^2 + h$$

(b) On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3\cdot(1+h) + 2$$
$$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$$

C.2 On a les transformations algébriques :

$$f(h+2) - f(2) = \big(\sqrt{2\cdot(h+2)-1} - 3\big) - \big(\sqrt{2\times2-1} - 3\big)$$
$$= \sqrt{2\cdot h + 4 - 1} - 3 - \sqrt{3} + 3 = \sqrt{2\cdot h + 3} - \sqrt{3}$$
$$= \frac{\big(\sqrt{2\cdot h+3} - \sqrt{3}\big)\big(\sqrt{2\cdot h+3} + \sqrt{3}\big)}{\sqrt{2\cdot h+3} + \sqrt{3}}$$
$$= \frac{\big(\sqrt{2\cdot h+3}\big)^2 - \big(\sqrt{3}\big)^2}{\sqrt{2\cdot h+3} + \sqrt{3}} = \frac{(2\cdot h+3) - 3}{\sqrt{2\cdot h+3} + \sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\cdot h}{\sqrt{2\cdot h+3} + \sqrt{3}}$$

C.3

(1) Par la fonction f, on a les images de nombres :

- $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 - 2\times\dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 - 1 = -\dfrac{7}{4}$

  Ainsi, le point de coordonnées $\Big(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\Big)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.

- $f\big(2\big) = 2^2 - 2\times2 - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$

  Ainsi, le point de coordonnées $(\,2\,;-1\,)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$

(2) (a) La droite (d) passe par les points de coordonnées :

$$\Big(-\frac{5}{4}\,;0\Big) \quad ; \quad \Big(\frac{1}{2}\,;-\frac{7}{4}\Big)$$

Ainsi, la droite (d) a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{0 - \Big(-\dfrac{7}{4}\Big)}{-\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{7}{4}}{-\dfrac{7}{4}} = -1$$

La droite (d) admet une équation réduite de la forme :

$(d) : y = -x + b \quad$ où $b\in\mathbb{R}$

(b) La droite (d) passe par le point de coordonnées $\Big(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\Big)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :

$$y = -x + b$$
$$-\frac{7}{4} = -\frac{1}{2} + b$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{2}{4}$$
$$b = -\frac{5}{4}$$

Ainsi, la droite (d) admet pour équation réduite :

$$(d) : y = -x - \frac{5}{4}$$

(c) La droite (Δ) passe par les points de coordonnées :

$$(\,2\,;-1\,) \quad ; \quad (\,1\,;-3\,)$$

Ainsi, la droite (Δ) a pour coefficient directeur :

$$a' = \frac{-1-(-3)}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

La droite (d) et (Δ) admet une équation réduite de la forme :

$(\Delta) : y = 2x + b' \quad$ où $b'\in\mathbb{R}$

La droite (Δ) passe par le point de coordonnées $(\,2\,;-1\,)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :

$$y = 2x + b'$$
$$-1 = 2\times2 + b'$$
$$-1 = 4 + b'$$
$$b = -1 - 4$$
$$b = -5$$

Ainsi, la droite (Δ) admet pour équation réduite :

$(\Delta) : y = 2x - 5$

C.4

(1) On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(2+h) = 3\cdot(2+h)^2 - 2\cdot(2+h) = 3\cdot(4 + 4\cdot h + h^2) - 4 - 2h$$
$$= 12 + 12\cdot h + 3\cdot h^2 - 4 - 2\cdot h = 3\cdot h^2 + 10\cdot h + 8$$

(2) (a)

- On a :

  $f(2) = 3\times2^2 - 2\times2 = 3\times4 - 4 = 12 - 4 = 8$

- On a la simplification du quotient :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\big(3\cdot h^2 + 10\cdot h + 8\big) - 8}{h} = \frac{3\cdot h^2 + 10\cdot h}{h}$$
$$= \frac{h\cdot(3\cdot h + 10)}{h} = 3\cdot h + 10$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{h\mapsto0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\mapsto0} 3\cdot h + 10 = 10$$

(b) On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :

$$f'(2) = 10$$

C.5

(1) (a) On a les manipulations algébriques suivantes :

$$f(4+h) - f(4) = \Big[\frac{1}{2}\cdot(4+h)^2 - 2(4+h) + 1\Big] - \Big(\frac{1}{2}\times4^2 - 2\times4 + 1\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(16 + 8h + h^2) - 8 - 2h + 1 - \Big(\frac{1}{2}\times16 - 8 + 1\Big)$$
$$= 8 + 4h + \frac{1}{2}h^2 - 8 - 2h + 1 - \big(8 - 8 + 1\big)$$
$$= \frac{1}{2}h^2 + 2h + 1 - 1 = \frac{1}{2}h^2 + 2h$$

(b) Ainsi, le quotient a pour valeur :

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{\dfrac{1}{2}h^2 + 2h}{h} = \frac{h\cdot\Big(\dfrac{1}{2}h + 2\Big)}{h} = \frac{1}{2}h + 2$$

On en déduit que lorsque h tend vers 0, cette expression tend vers 2. On obtient la limite :

$$\lim_{h\mapsto0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\mapsto0} \frac{1}{2}h + 2 = 2$$

(2) Le coefficient directeur c de la tangente (T) est le nombre dérivé en 4 de la fonction f.

On en déduit : $\quad f'(4) = 2$

C.6

(1) On utilisera les expressions suivantes :

- $f(1+h) = \dfrac{3\cdot(1+h)+1}{2\cdot(1+h)+2} = \dfrac{3+3\cdot h+1}{2+2\cdot h+2} = \dfrac{3\cdot h+4}{2\cdot h+4}$
- $f(1) = \dfrac{3\times 1+1}{2\times 1+2} = \dfrac{3+1}{2+2} = \dfrac{4}{4} = 1$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h+4}{2\cdot h+4}-1}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h+4}{2\cdot h+4}-\dfrac{2\cdot h+4}{2\cdot h+4}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{(3\cdot h+4)-(2\cdot h+4)}{2\cdot h+4}}{h} = \frac{\dfrac{3\cdot h+4-2\cdot h-4}{2\cdot h+4}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{h}{2\cdot h+4}}{h} = \frac{h}{2\cdot h+4}\times\frac{1}{h} = \frac{1}{2\cdot h+4}$$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :

$$f'(1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2\cdot h+4} = \frac{1}{4}$$

2. a. La tangente (T) a pour équation réduite :

$y = f'(1)\cdot(x-1)+f(1)$

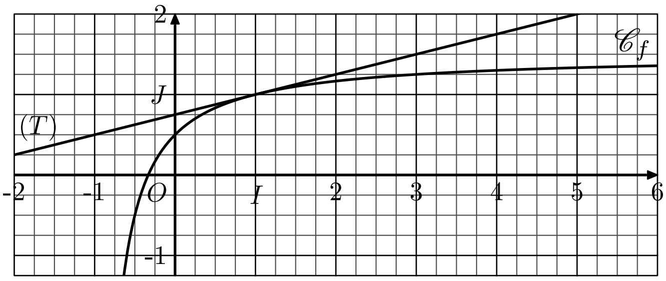
$y = \dfrac{1}{4}\cdot(x-1)+1$

$y = \dfrac{1}{4}\cdot x-\dfrac{1}{4}+1$

$y = \dfrac{1}{4}\cdot x+\dfrac{3}{4}$

b. Pour tracer la tangente, on utilise :

- le point de contact qui a pour coordonnées $(1\,;1)$
- l'ordonnée à l'origine qui définit le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{4}\right)$



C.7 On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{\sqrt{3(1+h)+1}-\sqrt{3\times 1+1}}{h}$$
$$= \frac{\sqrt{3+3\cdot h+1}-\sqrt{3+1}}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot h+4}-\sqrt{4}}{h}$$
$$= \frac{\sqrt{3\cdot h+4}-2}{h} = \frac{\left(\sqrt{3\cdot h+4}-2\right)\left(\sqrt{3\cdot h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{3\cdot h+4}+2\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{3\cdot h+4}\right)^2-2^2}{h\left(\sqrt{3\cdot h+4}+2\right)} = \frac{(3\cdot h+4)-4}{h\left(\sqrt{3\cdot h+4}+2\right)}$$
$$= \frac{3\cdot h}{h\left(\sqrt{3\cdot h+4}+2\right)} = \frac{3}{\sqrt{3\cdot h+4}+2}$$

Lorsque h tend vers 0, on a :

$$\lim_{h\mapsto 0}\sqrt{3\cdot h+4}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction g en 1 :

$$g'(1) = \lim_{h\mapsto 0}\frac{3}{\sqrt{3\cdot h+4}+2} = \frac{3}{4}$$