Ex 1 : ***Suite en mode explicite – 2 pts***

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=(n-4)^2+3$ où $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	19	12	7	4	3	4	7	12	19

Conjectures :

- (u_n) est croissante pour n geslant 4
- (u_n) est minorée par 3 et non majorée
- (u_n) est divergente vers $+\infty$

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=((n+1-4)^2+3)-((n-4)^2+3)$$
$$=(n-3)^2+3-(n-4)^2-3$$
$$=n^2-6n+9-n^2+8n-16$$
$$=2n-7$$

on cherche les valeurs de n telles que $2n-7>0$ donc $n>3{,}5$
donc si $n\geqslant 4$ alors $u_{n+1}-u_n>0$

donc la suite (u_n) est croissante pour $n\geqslant 4$

Ex 2 : ***Suite en mode explicite – 2 pts***

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{2n+1}{n-2}$ où $n\geqslant 3$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	7	4,5	3,66	3,25	3	2,83	2,71	2,62	2,55

Conjectures :

- (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 3$
- (u_n) est minorée par 2 et majorée par 7
- (u_n) est convergente vers 2

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2(n+1)+1}{(n+1)-2}\right)-\left(\frac{2n+1}{n-2}\right)$$
$$=\frac{2n+3}{n-1}-\frac{2n+1}{n-2}$$
$$=\frac{(2n+3)(n-2)-(n-1)(2n+1)}{(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{2n^2+3n-4n-6-2n^2+2n-n+1}{(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{-5}{(n-1)(n-2)}$$

or $-5<0$ et $(n-1)(n-2)>0$ car $n\geqslant 3$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 3$

Ex 3 : ***Suite en mode récurrente – 3 pts***

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+2$, $u_0=1$ où $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	2,5	3,25	3,62	3,81	3,9	3,95	3,97	3,98

Conjectures :

- (u_n) est croissante pour n geslant 0
- (u_n) est minorée par 1 et majorée par 4
- (u_n) est convergente vers 4

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=(0{,}5u_n+2)-u_n=-0{,}5u_n+2$$

on pose $f(x)=-0{,}5x+2$ pour $x\in\mathbb{R}$

racine de f : $-0{,}5x+2=0$ donne $x=4$

tableau de signes de f :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Or $u_0=1\in]-\infty;4]$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Ex 4 : ***Suite en mode récurrente – 3 pts***

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\dfrac{-1}{u_n+2}\,;u_0=1$ où $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	-0,33	-0,5	-0,71	-0,77	-0,81	-0,84	-0,86	-0,88

Conjectures :

- (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 0$
- (u_n) est minorée par -1 et majorée par 1
- (u_n) est convergente vers -1

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-1}{u_n+2}\right)-u_n=\frac{-1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2-2u_n-1}{u_n+2}$$

on pose $f(x)=-x^2-x-1$ avec $x\in\mathbb{R}$

racine de f : $x_0=-1$ car $\Delta=0$

tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Or $u_0=1\in[-1;+\infty[$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 0$

Ex 1 : **(*)** -

a) $u_n=2+3n$; $u_{n+1}-u_n=(2+3(n+1))-(2+3n)=2+3n+3-2-3n=3$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=3$ et $u_0=2$

b) $u_{n+1}=2+u_n\,;u_0=1$; $u_{n+1}-u_n=2+u_n-u_n=2$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=2$ et $u_0=1$

c) $u_n=\dfrac{3n+1}{2}=0{,}5+1{,}5n$;
$u_{n+1}-u_n=(0{,}5+1{,}5(n+1))-(0{,}5+1{,}5n)=0{,}5+1{,}5n+1{,}5-0{,}5-1{,}5n=1{,}5$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=1{,}5$ et $u_0=0{,}5$

d) $u_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{0{,}5\times(0{,}75)^{n+1}}{0{,}5\times(0{,}75)^n}=\dfrac{(0{,}75)^{n+1}}{(0{,}75)^n}=(0{,}75)^{n+1-n}=0{,}75$
donc (u_n) est géométrique avec $q=0{,}75$ et $u_0=0{,}5$

e) $u_n=5^{n+1}$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(5)^{n+2}}{(5)^{n+1}}=(5)^{n+2-n-1}=5$
donc (u_n) est géométrique avec $q=5$ et $u_0=5$

f) $u_n=2^n+2n$; $u_0=1\,,u_1=4\,,u_2=8$ donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

g) $5u_{n+1}-2u_n=1\;;u_0=-1$; $u_{n+1}=0{,}4u_n+0{,}2$ donc $u_1=-0{,}2\,,u_2=0{,}12$
donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

h) $u_n=n^2-n$; $u_0=0\;;u_1=0\;;u_2=2\;;u_3=6\;;u_4=12$
donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_4}{u_3}\neq\dfrac{u_3}{u_2}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

Ex 2 : **(*)** - Calculer les sommes :

$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8192}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=0{,}5$ et de raison $q=0{,}5$ donc $u_n=0{,}5\times(0{,}5)^n$ on cherche n tel que $u_n=\frac{1}{8192}$ on trouve $n=12$ donc $S_1=0{,}5\times\frac{1-(0{,}5)^{13}}{1-0{,}5}\simeq 0{,}999878$

$S_2=4+7+10+\cdots+172$; (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0=4$ et de raison $r=3$ donc $u_n=4+3n$ or $172=4+3\times 56$ donc $S_2=\frac{4+172}{2}\times 57=5016$

$S_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots-\frac{1}{6561}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=\frac{1}{3}$ et de raison $q=\frac{-1}{3}$ donc $u_n=\frac{1}{3}\times(\frac{-1}{3})^n$ on cherche n tel que $u_n=\frac{-1}{6561}$ on trouve $n=7$ donc $S_3=\frac{1}{3}\times\frac{1-(\frac{-1}{3})^8}{1-(\frac{-1}{3})}\simeq 0{,}249962$

$S_4=5+\frac{17}{3}+\frac{19}{3}+7+\cdots+63$; (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0=5$ et de raison $r=\frac{2}{3}$ donc $u_n=5+\frac{2}{3}n$ or $63=5+\frac{2}{3}\times 87$ donc $S_4=\frac{5+63}{2}\times 88=2992$

$S_5=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\cdots+16\sqrt{2}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=\frac{1}{8}$ et de raison $q=\sqrt{2}$ donc $u_n=\frac{1}{8}\times(\sqrt{2})^n$ on cherche n tel que $u_n=16\sqrt{2}$ on trouve $n=15$ donc $S_5=\frac{1}{8}\times\frac{1-(\sqrt{2})^{16}}{1-(\sqrt{2})}\simeq 76{,}953057$ ***Ex 4*** : **(**)** - Soit (u_n) la suite définie par

$u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1) Dresser la table de valeurs et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	1,33	0,88	0,59	0,4	0,26	0,17

Conjectures :

- (u_n) est minorée par 0 et majorée par 2
- (u_n) est géométrique
- (u_n) est convergente vers 0
- (u_n) est décroissante

2) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times(\frac{2}{3})^{n+1}}{2\times(\frac{2}{3})^n}=\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{(\frac{2}{3})^n}=(\frac{2}{3})^{n+1-n}=\frac{2}{3}$$

donc (u_n) est géométrique de 1er terme $u_0=2$ et de raison $q=\frac{2}{3}$

3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=(2\times(\frac{2}{3})^{n+1})-(2\times(\frac{2}{3})^n)=2\times((\frac{2}{3})^n\times(\frac{2}{3})^1-(\frac{2}{3})^n\times 1)$$
$$=2\times(\frac{2}{3})^n\times(\frac{2}{3}-1)=2\times(\frac{2}{3})^n\times(\frac{-1}{3})=(\frac{-2}{3})\times(\frac{2}{3})^n$$

or $\frac{-2}{3}<0$ et $(\frac{2}{3})^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ donc (u_n) est décroissante

4) Calculer la limite de la suite (u_n)

$0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=0$

5) On pose $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

a) $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\times \dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6\times(1-(\frac{2}{3})^{n+1})$

b) $0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(S_n)=6\times(1-0)=6$

Ex 6 : **(**)** - Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=0{,}5\,u_n+2{,}5$ et $u_0=1$

1) a) Dresser la table de valeurs et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	3	4	4,5	4,75	4,88	4,94

Conjectures :

- (u_n) est minorée par 1 et majorée par 5
- (u_n) est convergente vers 5
- (u_n) est croissante

b) $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) On pose la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-5$

a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-5}{u_n-5}=\frac{0{,}5\,u_n+2{,}5-5}{u_n-5}=\frac{0{,}5\,u_n-2{,}5}{u_n-5}=\frac{0{,}5(u_n-5)}{u_n-5}=0{,}5$$

donc (v_n) est géométrique de 1er terme $v_0=-4$ et de raison $q=0{,}5$

b) $v_n=v_0\times q^n=-4\times(0{,}5)^n$ donc $u_n-5=-4\times(0{,}5)^n$

donc $u_n=5-4\times(0{,}5)^n$

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$u_{n+1}-u_n=(5-4\times(0{,}5)^{n+1})-(5-4\times(0{,}5)^n)=-4\times(0{,}5)^{n+1}+4\times(0{,}5)^n$

$u_{n+1}-u_n=4\times(-(0{,}5)^n\times0{,}5+(0{,}5)^n)=4\times(0{,}5)^n\times(-0{,}5+1)=2\times(0{,}5)^n$

or $2>0$ et $(0{,}5)^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc (u_n) est croissante

d) Déterminer la limite de la suite (u_n)

$0<0{,}5<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(0{,}5)^n=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=5-4\times0=0$