

### Suite arithmétique

- Une suite arithmétique  $(u_n)$  est définie par :
  - Un premier terme :  $u_0$  ou  $u_p$
  - $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + r$  avec  $r$  raison de  $(u_n)$ .  
(ou à partir de  $p$  si  $(u_n)$  commence à  $u_p$ )

- Une suite est arithmétique de raison  $r$  ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut  $r$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

- L'expression de  $u_n$  en fonction de  $u_0$  ou  $u_p$  est :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

### Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des  $n$  premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

$(n-p+1)$  correspond aux nbre de termes de  $u_p$  à  $u_n$

Exemple :  $S = 8 + 13 + 18 + \dots + 2013$

$$S = \underbrace{\left( \frac{2013 - 8}{5} + 1 \right)}_{\text{Nbre de termes}} \times \frac{8 + 2013}{2} = 406\,221$$

### Suite géométrique

- Une suite géométrique  $(v_n)$  est définie par :

- Un premier terme :  $v_0$  ou  $v_p$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = v_n \times q$  avec  $q$  raison de  $(v_n)$ .  
(ou à partir de  $p$  si  $(v_n)$  commence à  $v_p$ )

- Une suite est géométrique de raison  $q \neq 0$ , de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut  $q$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

- L'expression de  $v_n$  en fonction de  $v_0$  ou  $v_p$  est :

$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}$$

## Suites

Une suite numérique est une fonction définie de  $\mathbb{N}$  (ou partie de  $\mathbb{N}$ ) dans  $\mathbb{R}$  :

$$(u_n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto u_n$$

- $u_n$  désigne le terme général de la suite.
- $(u_n)$  désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points.

### Somme des termes d'une suite géométrique $q \neq 1$

- Somme des  $(n+1)$  premières puissance de  $q$  :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$(n-p+1)$  correspond aux nbre de termes de  $v_p$  à  $v_n$

### Variation d'une suite géométrique

- Si  $q > 1$ , la suite  $(q^n)$  est croissante.
- Si  $0 < q < 1$ , la suite  $(q^n)$  est décroissante.

Pour une suite géométrique quelconque, on prendra en compte le premier terme  $v_0$ .

- Si  $v_0 > 0$ ,  $(v_n)$  et  $(q^n)$  ont même variation.
- Si  $v_0 < 0$ ,  $(v_n)$  et  $(q^n)$  ont des variations contraires

- ⚠ Si  $q = 1$  ou  $q = 0$ , la suite  $(q^n)$  est constante.
- Si  $q < 0$ , la suite  $(q^n)$  n'est pas monotone.

### Comportement de la suite $q^n$

On a les limites suivantes selon les valeurs de  $q$  :

- si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- si  $q = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- si  $-1 < q < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- si  $q \leq -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  n'existe pas

### Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs. On montre par exemple que :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

### Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

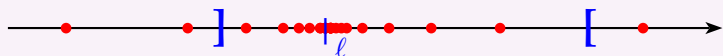
Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls. On montre par exemple, pour  $v_0$  et  $v_1$  non nuls, que :

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

## Limites d'une suite

- **Convergence** d'une suite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  signifie que

Tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  (**aussi petit soit-il**) contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers  $\ell$ .



Il n'existe qu'un nombre fini de termes à l'extérieur de cet intervalle.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0$  et la relation pour tout naturel  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$(u_n)$  est monotone et converge vers  $\ell$ .

Algorithme permettant de déterminer le rang  $N$  à partir duquel les termes de la suite  $(u_n)$  se trouvent à l'intérieur d'un intervalle ouvert centré en  $\ell$  de rayon  $r$ .

**Variables :**  $N$  entier,  $u$  réel

**Entrées et initialisation**

|  $u_0 \rightarrow u$  ,  $0 \rightarrow N$

**Traitement**

| tant que  $|u - \ell| \geq r$

| faire

| |  $f(u) \rightarrow u$

| |  $N + 1 \rightarrow N$

| fin

**Sorties :** Afficher  $N$

- **Divergence** d'une suite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  signifie que

Tout intervalle  $]A ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers  $+\infty$ .

Les termes de la suite  $(u_n)$  arrivent à dépasser  $A$ , **aussi grand soit-il**.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0$  et la relation pour tout naturel  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$(u_n)$  est croissante et diverge vers  $+\infty$ .

Algorithme permettant de déterminer le rang  $N$  à partir duquel les termes de la suite  $(u_n)$  sont supérieurs à un réel  $A$ .

**Variables :**  $N$  entier,  $u$  réel

**Entrées et initialisation**

|  $u_0 \rightarrow u$  ,  $0 \rightarrow N$

**Traitement**

| tant que  $u \leq A$  faire

| |  $f(u) \rightarrow u$

| |  $N + 1 \rightarrow N$

| fin

**Sorties :** Afficher  $N$

**Remarque :** une suite peut diverger sans avoir de limite.

La suite  $[(-2)^n]$  diverge et n'admet pas de limite.

## Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

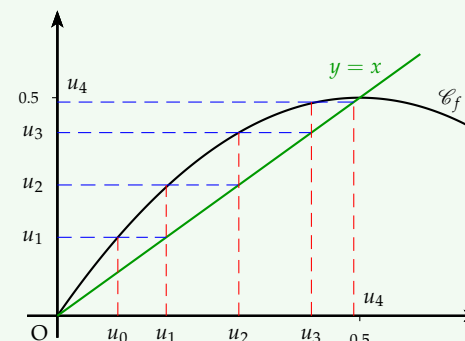
- **Variation** d'une suite d'une suite : **2 méthodes**

- 1) On étudie le signe de la quantité :  $u_{n+1} - u_n$ .  
Si la quantité est  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) la suite est croissante (resp. décroissante).
- 2) Si tous les termes sont  $> 0$ , on compare la quantité  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.  
Si la quantité est  $\geq 1$  (resp.  $\leq 1$ ), la suite est croissante (resp. décroissante).

- **Représentation** des premiers termes de la suite :

**Méthode :** On trace la courbe de la fonction associée  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

**Exemple :** Soit la suite  $u_0 = 0,1$  et  $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ .



- Pour trouver la **forme explicite** de  $u_n$ , on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.

Parmi ces suites, on a les suites **arithmético-géométriques** :  $u_{n+1} = au_n + b$

**Exemple :**  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ . On pose  $v_n = u_n - 4$

Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ , la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 4 = -3$

$$v_n = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 4 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$