C.1 L'espérance a pour valeur :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0\times0{,}4 + 1\times0{,}38 + 2\times0{,}15 + 5\times0{,}05 + 10\times0{,}02 \\ &= 0 + 0{,}38 + 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}20 \\ &= 1{,}13 \end{aligned}$$

C.2

1. a. La somme des gains mis en jeu dans cette tombola a pour valeur :
$2\times100 + 15\times10 = 200 + 150 = 350\,€$.

b. 100 tickets d'une valeur de 10 € sont mis en vente, rapportant ainsi une vente de :
$100\times10 = 1\,000\,€$
Le bénéfice réalisé par les organisateurs de la tombola est de :
$1000 - 350 = 650\,€$.

2. Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	10	100
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	$\dfrac{83}{100}$	$\dfrac{15}{100}$	$\dfrac{2}{100}$

3. a. Les gains possibles lors de la tombola sont 0, 10 et 100 :

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) + 10\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10) + 100\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}100) \\ &= 0\times\frac{83}{100} + 10\times\frac{15}{100} + 100\times\frac{2}{100} \\ &= 0 + 1{,}5 + 2 = 3{,}5\,€ \end{aligned}$$

b. Par définition de la variance d'une variable aléatoire, on a :

$$V(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)\cdot\big[0 - E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10)\cdot\big[10 - E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}100)\cdot\big[100 - E(\mathcal{X})\big]^2$$

$$= \frac{83}{100}\cdot(0-3{,}5)^2 + \frac{15}{100}\cdot(10-3{,}5)^2 + \frac{2}{100}\cdot(100-3{,}5)^2$$

$$= \frac{83}{100}\cdot(-3{,}5)^2 + \frac{15}{100}\times6{,}5^2 + \frac{2}{100}\times96{,}5^2$$

$$= 202{,}75$$

On en déduit l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:
$\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V} \approx 14{,}239 \approx 14{,}24$

C.3

1. Voici la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

Déterminons l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X}) &= 0\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) + 1\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1) + 10\times\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10) \\ &= 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{3} + 10\times\frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = \frac{12}{6} = 2 \end{aligned}$$

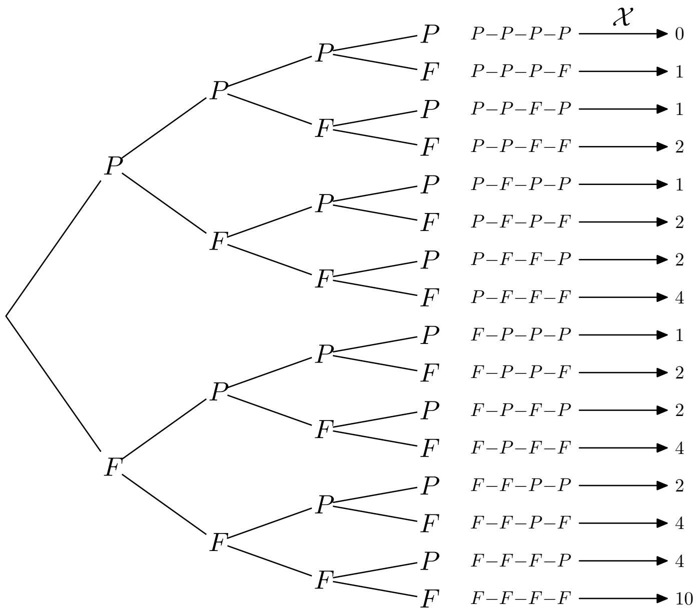
Déterminons l'espérance de cette variable aléatoire $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{X}) &= \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)\cdot\big[0-E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)\cdot\big[1-E(\mathcal{X})\big]^2 + \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}10)\cdot\big[10 - E(\mathcal{X})\big]^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + \frac{1}{3}\cdot(-1)^2 + \frac{1}{6}\times8^2 \\ &= \frac{1}{2}\times4 + \frac{1}{3}\times1 + \frac{1}{6}\times64 \\ &= 2 + \frac{1}{3} + \frac{32}{3} = \frac{6+1+32}{3} = \frac{39}{3} = 13 \end{aligned}$$

2. Ainsi, l'espérance a pour valeur arrondie au centième :
$\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{13} \approx 3{,}61$

C.4

1. Voici l'arbre de choix de cette expérience aléatoire :



Pour les questions suivantes, ont été rajoutés les valeurs de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. Cette expérience comporte 16 issues distinctes. Ainsi, en supposant l'équiprobabilité de cette expérience, chaque évènement élémentaire possède une probabilité de $\dfrac{1}{16}$.
De plus, il y a 4 issues qui sont associées à la valeur 4 de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

On en déduit : $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}4) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

3. Voici le tableau complété de la loi de probabilité de $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}k)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$

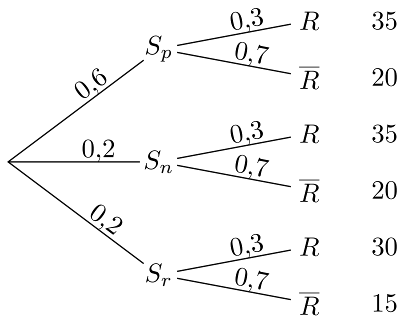
4. Voici le tableau complété de la loi de distribution cumulative de $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant k)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{11}{16}$	$\dfrac{15}{16}$	1

C.5

1. On a l'arbre de probabilité suivante :

 (cc) BY-NC



Sur la colonne de droite est représentée le prix payé dans chaque cas prśenté par cette arbre de choix.

2 a D'après l'arbre de probabilité, on a :
$\mathcal{P}\big(S_p\cap\overline{R}\big) = 0{,}6\times0{,}7 = 0{,}42$

b Les évènements S_P, $S_n\cap\overline{R}$ et $S_r\cap\overline{R}$ sont disjoints entre eux. On a l'égalité suivante :
$\mathcal{P}\big(S_p\cup\overline{R}\big) = \mathcal{P}\big(S_p\big) + \mathcal{P}\big(S_n\cap\overline{R}\big) + \mathcal{P}\big(S_r\cap\overline{R}\big)$
$= 0{,}6 + 0{,}2\times0{,}7 + 0{,}2\times0{,}7$
$= 0{,}6 + 0{,}14 + 0{,}14 = 0{,}88$

3 a D'après l'arbre de probabilité présenté à la question 1, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend 4 valeurs distinctes :
15 ; 20 ; 30 ; 35

On a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}15\big) = \mathcal{P}\big(S_R\cap\overline{R}\big) = 0{,}2\times0{,}7 = 0{,}14$
- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}20\big) = \mathcal{P}\big(S_p\cap\overline{R}\big) + \mathcal{P}\big(S_n\cap\overline{R}\big)$
  $= 0{,}6\times0{,}7 + 0{,}2\times0{,}7 = 0{,}42 + 0{,}14 = 0{,}56$
- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}30\big) = \mathcal{P}\big(S_r\cap R\big) = 0{,}2\times0{,}3 = 0{,}06$
- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}35\big) = \mathcal{P}\big(S_p\cap R\big) + \mathcal{P}\big(S_n\cap R\big)$
  $= 0{,}6\times0{,}3 + 0{,}2\times0{,}3 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$

En résumé, on obtient le tableau ci-dessous représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	15	20	30	35
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}k\big)$	0,14	0,56	0,06	0,24

b La variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour espérance :
$E(\mathcal{X}) = 15\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}15\big) + 20\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}20\big) + 30\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}30\big) + 35\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}35\big)$
$= 15\times0{,}14 + 20\times0{,}56 + 30\times0{,}06 + 35\times0{,}24$
$= 2{,}1 + 11{,}2 + 1{,}8 + 8{,}4 = 23{,}5$

https://chingmath.fr (cc) BY-NC