Géométrie vectorielle et analytique dans le plan

Formulaire – Vecteurs & Colinéarité

Un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction (la droite (AB)).
- un sens (de A vers B)
- Une longueur : $\|\vec{u}\|$ ou AB norme du vecteur

Égalité de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow$$

ABDC parallélogramme.

La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés

- Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \quad ; \quad y_B - y_A)$$

- Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du milieu I de [AB] vérifient :

$$I = \left(\frac{x_B + x_A}{2} \quad ; \quad \frac{y_B + y_A}{2}\right)$$

- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$, le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est nul

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

- Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x;y)$ et la distance entre les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifient :

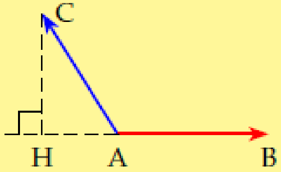
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Formulaire – Produits Scalaires

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

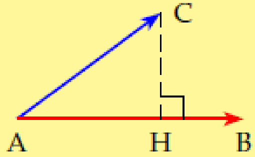
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sens contraire :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB\times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ même sens :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH$

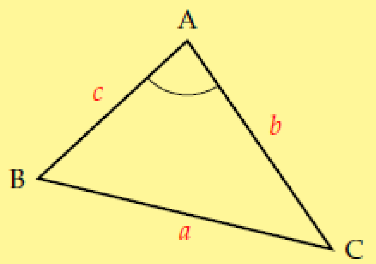
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \overset{\text{notation matricielle}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Avec a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



Formulaire – Droites & Cercles

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$d \;:\; ax + by + c = 0, \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ non tous nuls.}$$

Un vecteur directeur de la droite d est alors $\vec{u}(-b\,;\,a)$

Toute droite d, non verticale, admet une équation de la forme :

$$d \;: y = mx + p \quad \text{où } \vec{u}(1\,;m) \text{ est vecteur directeur de } d$$

- Si $d \;:\; ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a\,;\,b)$ vecteur normal à d.
- Réciproquement si un vecteur $\vec{n}(a\,;\,b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d, alors $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d.

L'équation cartésienne d'un cercle, $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon r est de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Un cercle de diamètre [AB] est caractérisé par : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$