***Ex 3 :***

C.

1 L'expression de la fonction $f$ étant donnée sous la forme d'une somme, on en déduit facilement l'expression de sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{8}\times(3x^2) - \frac{1}{2}\times(2x) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{8}\cdot x^2 - x - \frac{1}{2}$$

2 a Le coefficient directeur de la tangente $(T)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est la valeur du nombre dérivée de la fonction $f$ en 2 :

$$f'(2) = \frac{3}{8}\times 2^2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

b La droite $(T)$ ayant pour coefficient directeur, son équation réduite admet pour expression :

$(T)$ : $y = -x + b$ où $b \in \mathbb{R}$.

L'image de 2 par la fonction $f$ a pour valeur :

$$f(2) = \frac{1}{8}\times 2^3 - \frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 2 + 3$$
$$= 1 - 2 - 1 + 3 = 1$$

On en déduit que le point de coordonnées $A(2\,;3)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ; étant le point de contact de la tangente $(T)$ avec la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que le point $A$ appartient aussi à la droite $(T)$.

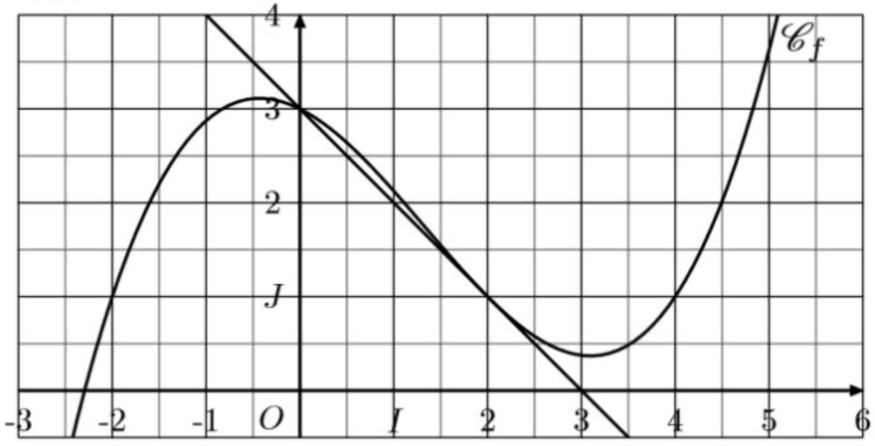
Ainsi, les coordonnées du point $A$ vérifient l'équation réduite de la tangente $(T)$ :

$$y = -x + b$$
$$1 = -2 + b$$
$$1 + 2 = b$$
$$b = 3$$

Ainsi, la droite $(T)$ admet pour équation réduite :

$y = -x + 3$

c Voici la représentation de la droite $(T)$ :




3 Les abscisses des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(d)$ vérifient l'équation :

$$f(x) = -x + 3$$
$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + 3 = -x + 3$$

Multiplions par 8 les deux membres de cette équation :

$$x^3 - 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 24 = -8\cdot x + 24$$
$$x^3 - 4\cdot x^2 - 4x + 8\cdot x = 0$$
$$x^3 - 4\cdot x^2 + 4\cdot x = 0$$
$$x\cdot(x^2 - 4\cdot x + 4) = 0$$

En reconnaissant la seconde identité remarquable :

$$x\cdot(x-2)^2 = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

Cette équation admet pour ensemble de solution :

$\mathcal{S} = \{0\,;\,2\}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $(d)$ admettent deux points d'intersection ayant pour abscisse 0 et 1. Ces deux points d'intersection ont pour coordonnées :

$A(0\,;3)$ ; $B(2\,;1)$

**Ex 4** : $f(x)=0,25x^4+x^3-4x-2$ avec $x\in[-4;3]$

dérivée : $f'(x)=0,25\times 4x^3+3x^2-4\times 1-0=x^3+3x^2-4$

or $(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4=x^3+3x^2-4$

donc on obtient $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$

le tableau de signes de $f'$ est le suivant :

| $x$ | -4 | | -2 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | + | |
| $(x+2)^2$ | | + | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | + | |

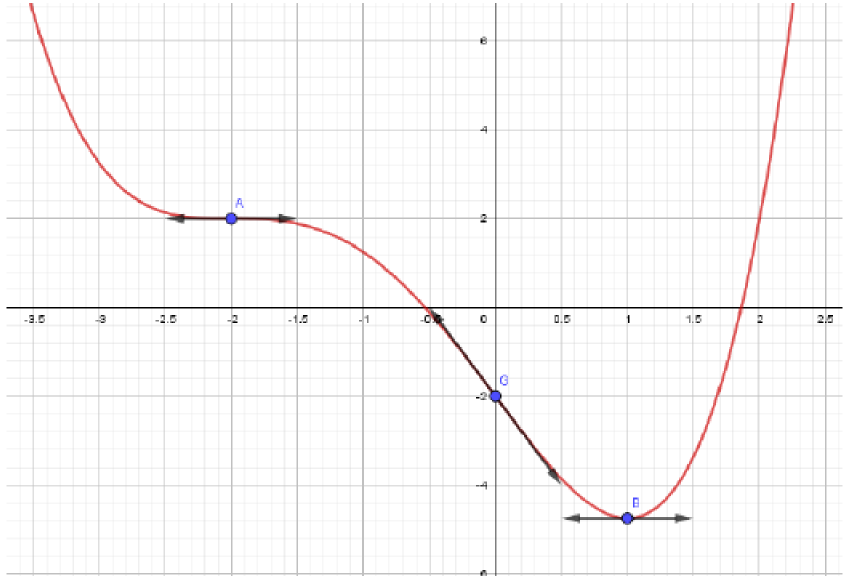
on en déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | -4 | | -2 | | 1 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | + | |
| $f$ | 14 | ↘ | 2 | ↘ | -4,75 | ↗ | 33,25 |

Interprétation :

- la fonction $f$ admet un minimum local en $x=1$
  - ce minimum local vaut $f(1)=-4,75$
- la courbe $C_f$ admet un point d'inflexion en $A(-2;2)$

graphique $C_f$ complété :



***Ex 5** :* **(**) - 3 pts**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ pour $x\neq -1$

1) Calculer la dérivée et montrer que $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+2)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-x+2x-1-x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$ (cf COURS « $2^{nd}$ degré »)

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de $f$
on obtient le tableau de signes ci-dessous

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | + | |
| $x+3$ | | $-$ | 0 | + | | + | | + | |
| $(x+1)^2$ | | + | | + | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | $-$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | + | |

On déduit le tableau de variations de f

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | $-$ | $\|\|$ | $-$ | 0 | + | |
| Variations de $f$ | | ↗ | -7 | ↘ | $\|\|$ $+\infty$ | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | | | $-\infty$ $\|\|$ | | 1 | | |

3) Déterminer les éventuels *extrema* locaux de $f$

- $f$ admet un minimum local en $x=1$
- $f$ admet un maximum local en $x=-3$

4) Compléter le graphique donné en ci-dessous