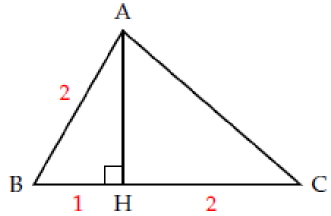
Exemple : En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

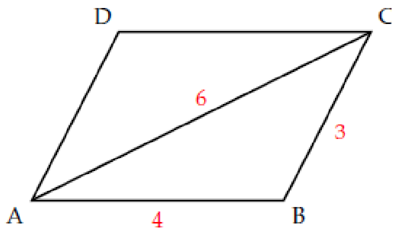


$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} \quad (B \xrightarrow{\perp} H)$$
$$= AB^2+AH^2$$
$$= AB^2+(AB^2-BH^2) \quad \text{th de Pythagore}$$
$$= 2AB^2-BH^2$$
$$= 2\times 4-1=7$$

$$\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} \quad (A \xrightarrow{\perp} H)$$
$$= AH^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}$$
$$= (AB^2-BH^2)-HC\times HB \quad \text{th de Pythagore et colinéarité}$$
$$= 4-1-2\times 1=1$$

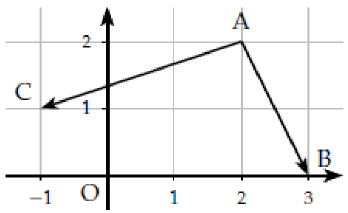
Exemple : ABCD parallélogramme tel que : AB = 4, BC = 3 et AC = 6.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AD}\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$$
$$= \frac{1}{2}(36-16-9) = \frac{11}{2}$$



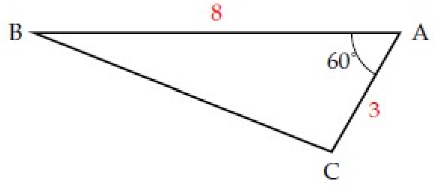
Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3-2\\0-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-2\\1-2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$
$$= 1\times(-3)+(-2)\times(-1)=-1$$



Exemple : Déterminer la longueur BC et les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ci-dessous.

D'après la figure : $b=3$, $c=8$ et $\widehat{A}=60°$.



- D'après la relation d'Al-Kashi, nous avons :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}=3^2+8^2-2\times3\times8\times\frac{1}{2}=9+64-24=49 \quad\Leftrightarrow\quad a=7$$

- Pour déterminer l'angle $\widehat{B}$, on effectue une **permutation circulaire** de la formule d'Al-Kashi, c'est à dire :

$$a\to b \quad,\quad b\to c \quad,\quad c\to a \quad,\quad \widehat{A}\to\widehat{B}$$

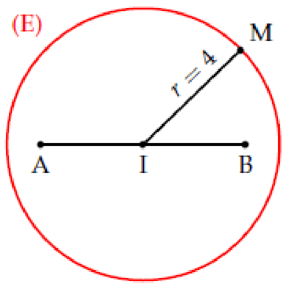
On obtient donc : $b^2=c^2+a^2-2ac\cos\widehat{B} \quad\Leftrightarrow\quad 2ac\cos\widehat{B}=a^2+c^2-b^2$

$$\cos\widehat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49+64-9}{2\times7\times8}=\frac{104}{112}=\frac{13}{14}$$

On obtient donc : $\widehat{B}=\arccos\left(\frac{13}{14}\right)\approx 21{,}7°$

- Enfin, par complément à 180° : $\widehat{C}\simeq 180-60-21{,}79\approx 98{,}21°$

Exemple : Déterminer l'ensemble (E) des points M tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=7$ et $AB=6$.



$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=7 \quad\Leftrightarrow\quad MI^2-\frac{1}{4}AB^2=7 \quad\Leftrightarrow$$
$$MI^2=7-\frac{1}{4}AB^2=7+9=16=4^2$$

L'ensemble (E) est le cercle de centre I et de rayon 4.

Exemple : Soit la droite d définie par les point $A(2\,;\,3)$ et $\vec{u}(-2\,;\,1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Soit $M(x\,;\,y)\in d$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}x-2 & -2\\ y-3 & 1\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)+2(y-3)=0$$
$$x+2y-2-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+2y-8=0$$