### *Exercice 20 (*)*

On donne la loi de probabilité de $X$ :

| $k$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | 0,25 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,15 | **1** |

La loi de $X$ est bien valide car $\sum p(X=k)=1$

$$E(X)=\sum k\times p(X=k)$$

$$E(X)=(-2)\times 0{,}25+(-1)\times 0{,}15+0\times 0{,}2+1\times 0{,}25+2\times 0{,}15=-0{,}1$$

$$V(X)=\sum k^2\times p(X=k)-(E(x))^2$$

$$=(-2)^2\times 0{,}25+(-1)^2\times 0{,}15+0^2\times 0{,}2+1^2\times 0{,}25+2^2\times 0{,}15-(-0{,}1)^2=2$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}\simeq 1{,}414$$

### *Exercice 24 (*)*

Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur
On donne la loi de probabilité de $X$ :

| $k$ | $-5$ € | $+0{,}5$ € | $+1{,}5$ € | total |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | **1** |

La loi de $X$ est bien valide car $\sum p(X=k)=1$

$$E(X)=\sum k\times p(X=k)$$

$$E(X)=(-5)\times\frac{1}{6}+(0{,}5)\times\frac{1}{2}+(1{,}5)\times\frac{1}{3}=\frac{-1}{12}$$

### *Exercice 27 (**)*

Dans le jeu de domino il y a des couples de nombres $(a\,;b)$ avec $a,b\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$
le nombre de dominos est donc
$N$=7 (dominos avec le 0) + 6 (dominos avec le 1) + 5 (dominos avec le 2) + 4 (dominos avec le 3) + 3 (dominos avec le 4) + 2 (dominos avec le 5) + 1 (domino avec le 6) = $1+2+3+4+5+6+7=\frac{7\times(7+1)}{2}=28\,dominos\,!$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0-0 | 0-1 | 0-2 | 0-3 | 0-4 | 0-5 | 0-6 |
| 1 | | 1-1 | 1-2 | 1-3 | 1-4 | 1-5 | 1-6 |
| 2 | | | 2-2 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 |
| 3 | | | | 3-3 | 3-4 | 3-5 | 3-6 |
| 4 | | | | | 4-4 | 4-5 | 4-6 |
| 5 | | | | | | 5-5 | 5-6 |
| 6 | | | | | | | 6-6 |

probabilité d'obtenir un « double » : $p_1=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | **6** |
| 1 | | 2 | **3** | 4 | 5 | **6** | 7 |
| 2 | | | 4 | 5 | **6** | 7 | 8 |
| 3 | | | | **6** | 7 | 8 | **9** |
| 4 | | | | | 8 | **9** | 10 |
| 5 | | | | | | 10 | 11 |
| 6 | | | | | | | **12** |

probabilité d'obtenir un couple dont la somme est multiple de 3: $p_2=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| 1 | | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| 2 | | | 2 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| 3 | | | | 3 | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| 4 | | | | | 4 | $-1$ | $-1$ |
| 5 | | | | | | 5 | $-1$ |
| 6 | | | | | | | 6 |

On donne la loi de probabilité de $X$ :

| $k$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{1}{28}$ | 1 |

$E(X)=(-1)\times\frac{3}{4}+(0+1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{28}=0$ le jeu est donc *équitable !*

$V(X)=(-1)^2\times\frac{3}{4}+(0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times\frac{1}{28}-(0)^2=4$

donc $\sigma(X)=2$

Interprétations : En moyenne le gain du joueur va fluctuer dans l'intervalle $[-2;2]$ avec une fiabilité du risque de 68,3 %

***Exercice 29 (**)***

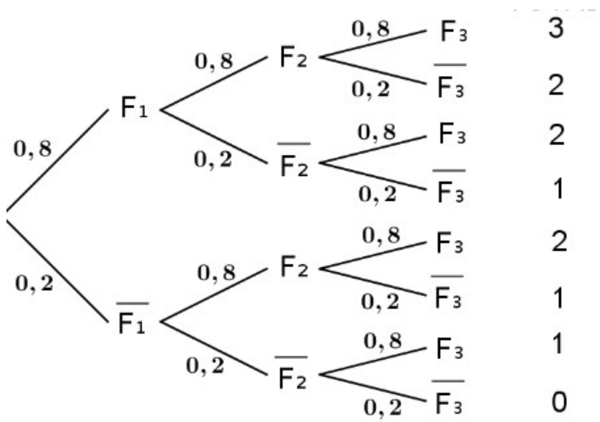
Soit F l'évènement « la flèche atteint sa cible ».
Un arbre pondéré est indispensable pour bien apprécier la situation :

**1)** Probabilité qu'aucune flèche atteigne la cible.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèches atteignant la cible.
X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

$$p(X=0)=p\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_2}\right)$$
$$=0,2\times0,2\times0,2=0,008$$

**2)** Probabilité qu'au moins une flèche atteigne la cible.

$$p(X\geq1)=1-p(X=0)$$
$$=1-0,008$$
$$=0,992$$




***Exercice 28 (***)***

**Sratégie 1** : Soit $G_1$ la variable aléatoire qui définit le gain du joueur.
La v.a. $G_1$ peut prendre les valeurs -10 et 10

$$\rightarrow p(G_1=-10)=\frac{19}{37} \text{ et } p(G_1=10)=\frac{18}{37}.$$

La loi de probabilité de $G_1$ est :

| $G_1$ | $-10$ | 10 | total |
|---|---|---|---|
| $p(G_1)$ | $\frac{19}{37}$ | $\frac{18}{37}$ | $\frac{37}{37}$ |

**Sratégie 2** : Soit $G_2$ la variable aléatoire qui définit le gain du joueur.
La v.a. $G_2$ peut prendre les valeurs -10 et 350

**Stratégie 2** : 1 case gagnante sur 37
La v.a. $G_2$ peut prendre les valeurs $-10$ et 350.

$$\rightarrow p(G_2=-10)=\frac{36}{37} \text{ et } p(G_2=350)=\frac{1}{37}.$$

La loi de probabilité de $G_2$ est :

| $G_2$ | $-10$ | 350 | total |
|---|---|---|---|
| $p(G_2)$ | $\frac{36}{37}$ | $\frac{1}{37}$ | $\frac{37}{37}$ |

**Sratégie 3** : Soit $G_3$ la variable aléatoire qui définit le gain du joueur.
La v.a. $G_2$ peut prendre les valeurs -10 et 20

**Stratégie 3** : 12 cases gagnantes sur 37
La v.a. $G_3$ peut prendre les valeurs $-10$ et 20.

$$\rightarrow p(G_3=-10)=\frac{25}{37} \text{ et } p(G_3=20)=\frac{25}{37}.$$

La loi de probabilité de $G_3$ est :

| $G_3$ | $-10$ | 20 | total |
|---|---|---|---|
| $p(G_3)$ | $\frac{25}{37}$ | $\frac{12}{37}$ | $\frac{37}{37}$ |

*Calculer l'espérance mathématique et la variance.*

$$E(G_1)=\frac{19}{37}\times(-10)+\frac{18}{37}\times 10=-\frac{1}{37}\times 10=-\frac{10}{37}$$

$$E(G_2)=\frac{36}{37}\times(-10)+\frac{1}{37}\times 350=\frac{-360+350}{37}=-\frac{10}{37}$$

$$E(G_3)=\frac{25}{37}\times(-10)+\frac{12}{37}\times 20=\frac{-250+240}{37}=-\frac{10}{37}$$

$$V(G_1)=\frac{19}{37}\times(-10)^2+\frac{18}{37}\times 10^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{1900}{37}+\frac{1800}{37}-\frac{100}{1369}=\frac{136800}{1369}\simeq 99{,}93$$

$$V(G_2)=\frac{36}{37}\times(-10)^2+\frac{1}{37}\times 350^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{3600}{37}+\frac{122\,500}{37}-\frac{100}{1369}\simeq 3408{,}04$$

$$V(G_3)=\frac{25}{37}\times(-10)^2+\frac{12}{37}\times 20^2-\left(-\frac{10}{37}\right)^2=\frac{2500}{37}+\frac{4800}{37}-\frac{100}{1369}=\frac{270\,000}{1369}\simeq 197{,}22$$

*Comparer les espérances et les variances.*
*Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "gagner une grosse somme" ?*

Ces trois stratégies proposent le même taux de succès mis en évidence par les espérances identiques.

La dispersion des gains est la plus faible pour la première stratégie : il y aura très peu de gros gagnants et de gros perdants.

La dispersion des gains est la plus forte avec la deuxième stratégie : il y aura quelques gros gagnants et quelques gros perdants.

### *Exercice 30 (**)*

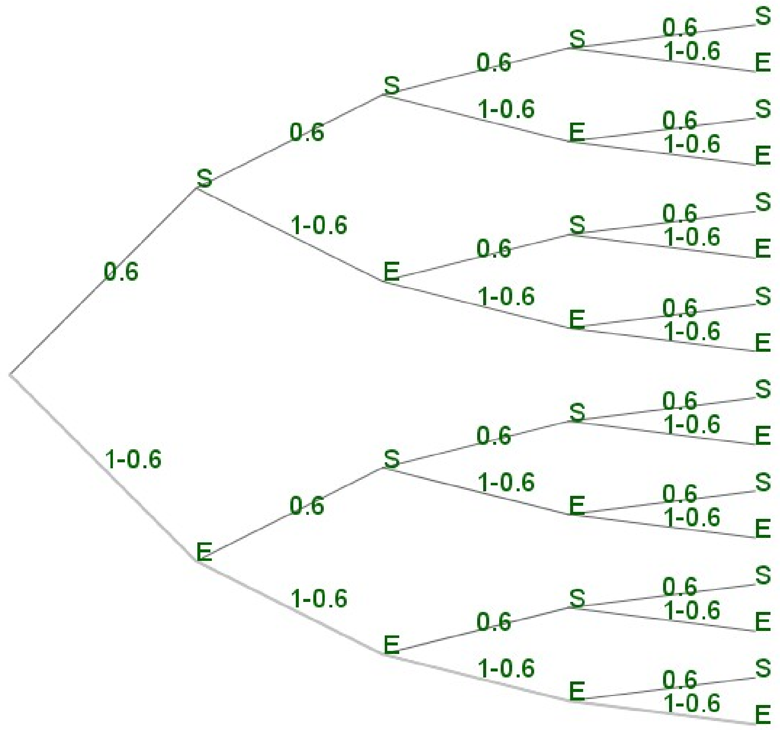
On donne la loi de probabilité de $X$ :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=k)$ | 0,0256 | 0,1536 | 0,3456 | 0,3456 | 0,1296 | 1 |

On trouve $E(X)=2{,}4$ ; $V(X)=0{,}96$ ; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}96}\simeq 0{,}98$

1) Construire un arbre pondéré de la situation
2) Déterminer la loi de probabilité de $X$
3) Calculer $E(X), V(X)$ puis $\sigma(X)$
4) Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice
5) Recommencer ces questions pour les valeurs suivantes de n :
   a) $n=5$ b) $n=6$ c) $n=7$ d) $n=8$

arbre de probabilités avec $n=4$ :




Triangle de PASCAL pour $n$ variant de 0 à 12 :

| p = | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n =0 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 |