1ère spé maths — Dérivation – Exercices types DS - *Corrigé* — fev 2024

Exercice 1

Nombre dérivé **(3 points)**

1) On a le tableau suivant :

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

2) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ et $h = 0,12$, et on dérive $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \quad \Leftrightarrow \quad f(9,12) \approx f(9) + 0,12f'(9) \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{3} + 0,12 \times \frac{1}{2\sqrt{9}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9,12} \approx 3,02$$

Exercice 2

Calcul de dérivées **(9 points)**

Fonction	Dérivabilité	Dérivée
1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x + 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 12x^2 - 18x + 3 = 3(4x^2 - 6x + 1)$
2) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{6}{x^4}$.
3) $f(x) = \sqrt{4x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$	$f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$
4) $f(x) = \dfrac{4}{1+3x}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{4 \times (-3)}{(1+3x)^2} = \dfrac{-12}{(1+3x)^2}$
5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{x^2 + 9 - 2x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{9 - x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$
6) $f(x) = x\sqrt{2x-3}$	$\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$	$f'(x) = \sqrt{2x-3} + \dfrac{2x}{2\sqrt{2x-3}} = \dfrac{2x-3+x}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{3(x-1)}{\sqrt{2x-3}}$
7) $f(x) = x - \dfrac{4x+1}{7x+2}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{7}\right\}$	$f'(x) = 1 - \dfrac{4(7x+2) - 7(4x+1)}{(7x+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2)^2 - 1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2-1)(7x+2+1)}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+1)(7x+3)}{(7x+2)^2}$
8) $f(x) = (3x+5)^4$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 4 \times 3(3x+5)^3 = 12(3x+5)^3$

Exercice 3

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (ne s'annule pas).

2) $f'(x) = \dfrac{8(x^2+2) - 2x(8x+4)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8x^2 + 16 - 16x^2 - 8x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-8x^2 - 8x + 16}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8(-x^2 - x + 2)}{(x^2+2)^2}$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0$ d'où $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$$f(-2) = \frac{-16+4}{4+2} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$f(1) = \frac{8+4}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$$

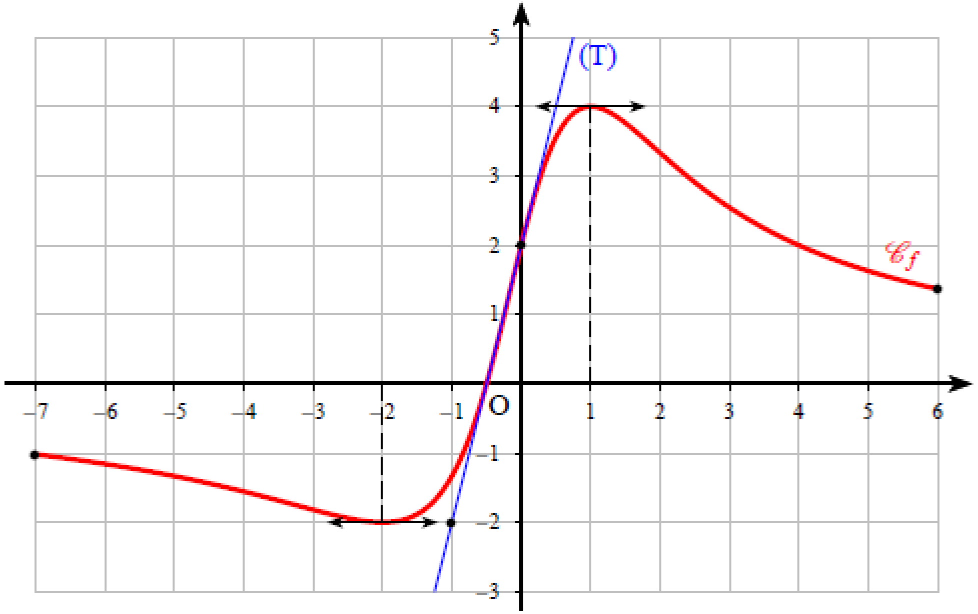
4) Quand x devient "très grand" alors $8x+4 \approx 8x$ et $x^2+2 \approx x^2$ donc $f(x) \approx \dfrac{8x}{x^2} \approx \dfrac{8}{x}$.
Comme 8 sur "très grand" devient "très petit" alors $f(x)$ tend vers 0.

5) La tangente (T) en 0 a comme équation : $y = f'(0)x + f(0)$

$f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$ donc (T) : $y = 4x + 2$.

6) D'après le tableau de variation : $\forall x \in \mathbb{R},\ -2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

7) Pour tracer (T), on peut prendre les points $(-1\,;-2)$ et $(0\,;\,2)$.
Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on peut calculer en plus deux images : $f(-7) \approx -1$ et $f(6) \approx 1,4$



Exercice 4

Aire maximale **(3 points)**

1) Comme l'abscisse de A est positive I = [0 ; 3].

2) $S(x) = 2xf(x) = -\frac{8}{9}(x^2 - 9) = -\frac{8}{9}x^3 + 8x$.

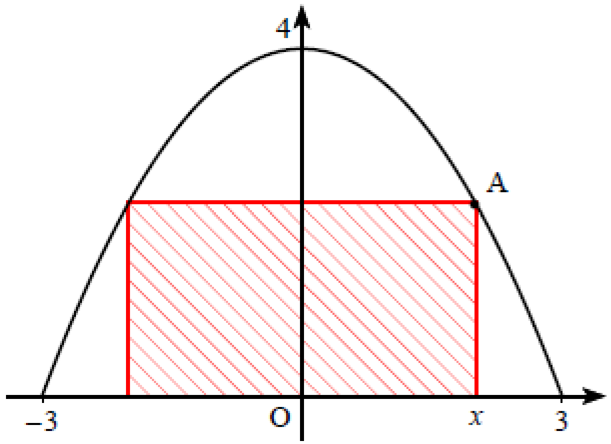
3) $S'(x) = -\frac{8}{3}x^2 + 8 = \frac{8}{3}(-x^2 + 3)$.

4) $S'(x) = 0 \iff x^2 = 3 \overset{x\geqslant 0}{\iff} x = \sqrt{3}$.

Le signe de $S'(x)$ est le signe de $(-x^2 + 3)$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		3
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$S(\sqrt{3})$	$\searrow$	0

L'aire est maximale pour $x = \sqrt{3}$, l'aire vaut alors : $S(\sqrt{3}) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9,24$.



Graphique de la fonction S sur $[-3\,;3]$