_Ex 1_ : (*) - 3 pts

Déterminer la nature des suites ci-dessous en justifiant la réponse

a) $u_n=1+2\times3^n$; $u_0=3$; $u_1=7$; $u_2=19$

ainsi $u_1-u_0\neq u_2-u_1$ et $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$

donc (u_n) n'est ni arithmétique , ni géométrique

b) $v_n=(n+2)^2-(n+1)^2$; $v_0=3$; $v_1=5$; $v_2=7$, (v_n) semble arithmétique

$v_n=(n^2+4n+4)-(n^2+2n+1)=2n+3$

$v_{n+1}-v_n=(2(n+1)+3)-(2n+3)=2n+2+3-2n-3=2$

donc (v_n) est arithmétique de 1er terme $v_0=3$ et de raison $r=2$

c) $w_n=1{,}5\times2^{n+1}$; $w_0=3$; $w_1=6$; $w_2=12$, (w_n) semble géométrique

$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{1{,}5\times2^{n+2}}{1{,}5\times2^{n+1}}=\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2^{n+2-n-1}=2$

donc (w_n) est arithmétique de 1er terme $w_0=1{,}5$ et de raison $q=2$

_Ex 2_ : (*) - 3 pts

Calculer les sommes ci-dessous en justifiant la réponse

a) $S_1=5+7+9+\cdots+117$; il s'agit de la somme de termes d'une suite arithmétique de 1er terme 5 et de raison 2 ; de plus il y a $N=\frac{117-5}{2}+1\ termes$

donc $S_1=\frac{5+117}{2}\times57=3477$

b) $S_2=1+2+4+8+\cdots+2^{15}$; il s'agit de la somme de termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 2 ; de plus il y a $N=16\ termes$

donc $S_2=1\times\frac{1-2^{16}}{1-2}=65535$

c) $S_3=512+256+128+\cdots+1$; il s'agit de la somme de termes d'une suite géométrique de 1er terme 512 et de raison 0,5 ; de plus il y a $N=10\ termes$

donc $S_2=512\times\frac{1-0{,}5^{10}}{1-0{,}5}=1023$

_Ex 3_ : (**) - 3 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=8\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

1) Dresser la table de valeurs pour $0\leqslant n\leqslant7$ et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	8	6	4,5	3,38	2,53	1,9	1,42	1,07

Conjectures :
- (u_n) est décroissante et géométrique
- (u_n) est minorée par 0 et majorée par 8
- (u_n) est convergente vers 0

2) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme et la raison

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{8\times0{,}75^{n+1}}{8\times0{,}75^n}=\frac{0{,}75^{n+1}}{0{,}75^n}=0{,}75^{n+1-n}=0{,}75$

donc (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=8$ et de raison $q=0{,}75$

3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$u_{n+1}-u_n=(8\times0{,}75^{n+1})-(8\times0{,}75^n)$

$=8\times(0{,}75^n\times0{,}75^1-0{,}75^n\times1)$

$=8\times0{,}75^n\times(0{,}75-1)$

$=(-2)\times0{,}75^n$

or $-2<0$ et $0{,}75^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc (u_n) est décroissante

4) Calculer la limite de la suite (u_n)

$q=0{,}75$ donc $0<q<1$ donc $\lim_{+\infty}(u_n)=0$

_Ex 4_ : (**) - 4 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=0{,}8u_n+4$ et $u_0=2$

1) a) Dresser la table de valeurs pour $0\leqslant n\leqslant7$ et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2	5,6	8,48	10,78	12,63	14,1	15,28	16,23

Conjectures :

- (u_n) est croissante, non géométrique, non arithmétique
- (u_n) est minorée par 2 et majorée par 20
- (u_n) est convergente vers 20

b) la suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? (justifier)

d'après la table de valeurs $u_1-u_0 \neq u_2-u_1$ et $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

donc (u_n) n'est ni arithmétique , ni géométrique

2) On pose la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-20$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme et la raison

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-20}{u_n-20}=\frac{0{,}8u_n+4-20}{u_n-20}=\frac{0{,}8u_n-16}{u_n-20}=\frac{0{,}8(u_n-20)}{u_n-20}=0{,}8$$

donc (v_n) est une suite géométrique de 1er terme $v_0=-18$ et de raison $q=0{,}8$

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n puis en déduire la formule explicite de u_n

$v_n=v_0\times q^n=-18\times 0{,}8^n$ donc $u_n=20-18\times 0{,}8^n$

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite

$\lim\limits_{+\infty}(0{,}8^n)=0$ car $0<0{,}8<1$

donc $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=20-18\times 0=20$

donc (u_n) est convergente vers 20

BONUS **: (***) - 2 pts**

On pose $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}$, $u_0=5$ et $v_n=\frac{1}{u_n-1}$

Une « astuce » de calcul consiste à déterminer la forme canonique de u_{n+1}

$$u_{n+1}=\frac{4u_n+8-8-1}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-9}{u_n+2}=4-\frac{9}{u_n+2}$$

1) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

$$v_{n+1}-v_n=\left(\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)-\left(\frac{1}{u_n-1}\right)=\left(\frac{1}{4-\frac{9}{u_n+2}-1}\right)-\left(\frac{1}{u_n-1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+2}}\right)-\left(\frac{1}{u_n-1}\right)=\frac{u_n+2}{3(u_n+2)-9}-\frac{1}{u_n-1}$$

$$=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{3}{3u_n-3}=\frac{u_n+2-3}{3u_n-3}=\frac{u_n-1}{3(u_n-1)}=\frac{1}{3}$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de 1er terme $v_0=\frac{1}{4}$

et de raison $r=\frac{1}{3}$

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

$v_n=v_0+n\times r$ donc $v_n=\frac{1}{4}+\frac{n}{3}$

$v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $v_n(u_n-1)=1$ donc $u_n\times v_n-v_n=1$

donc $u_n\times v_n=v_n+1$ donc $u_n=1+\frac{1}{v_n}$

donc $u_n=1+\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{n}{3}}$ donc $u_n=1+\frac{12}{4n+3}$

soit encore $u_n=\frac{4n+15}{4n+3}$

on vérifie ainsi que (u_n) est une suite convergente vers 1