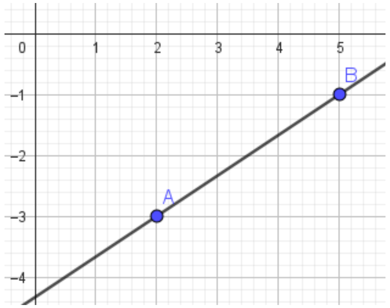
1ère spé **SOS maths : Droites & Cercles - *Corrigé*** **Fev 2024**

Ex 1 **: (**) - 4,5 pts** – *Équations cartésiennes de droites*

1) la droite (d) passe par $A(2;-3)$ et $B(5;-1)$

Soit $M(x;y)\in(d)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-(-3)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\-1-(-3)\end{pmatrix}$ sont colinéaires



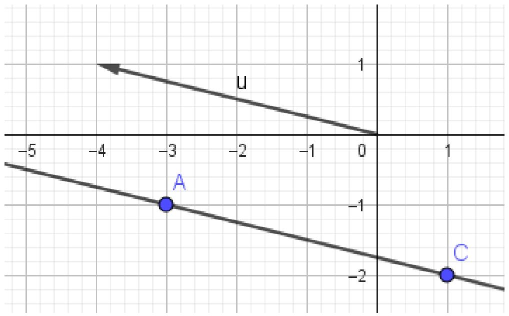
donc $\begin{vmatrix}x-2 & 3\\ y+3 & 2\end{vmatrix}=0$

donc on obtient $2(x-2)-3(y+3)=0$

d'où l'équation cartésienne de (d): $\boldsymbol{2x-3y-13=0}$

2) la droite (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ et passe par $C(1;-2)$

Soit $M(x;y)\in(d)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires



donc $\begin{vmatrix}x-1 & -4\\ y+2 & 1\end{vmatrix}=0$

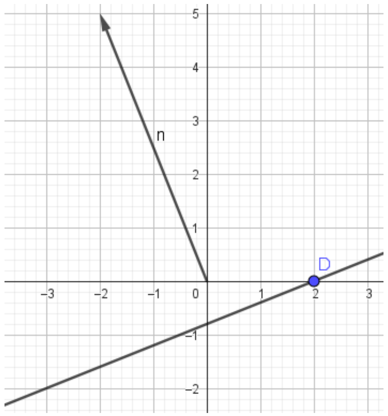
donc $x-1-(-4)(y+2)=0$

d'où l'équation cartésienne de (d): $\boldsymbol{x+4y+7=0}$

3) la droite (d) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et passe par $D(2;0)$

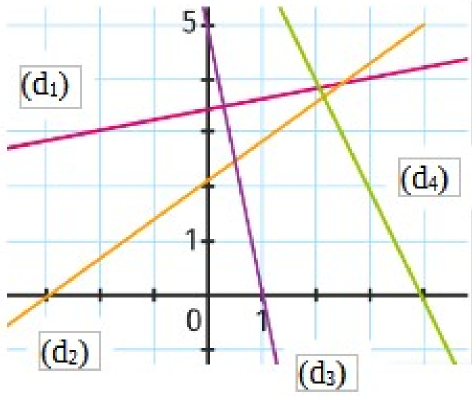
Soit $M(x;y)\in(d)$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc $-2(x-2)+5(y)=0$

d'où l'équation cartésienne de (d): $\boldsymbol{-2x+5y+4=0}$



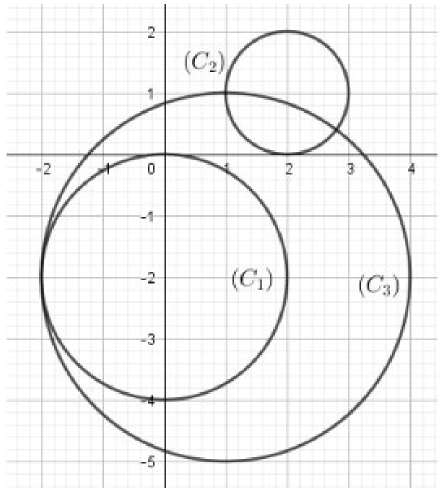
Ex 2 **: (*) - 2,5 pts** – *Lectures graphiques de droites et cercles*

équations de droites :



- la droite (d_1) passe par les points $A(-2;3)$ et $B(3;4)$
  donc $\boldsymbol{(d_1): y=\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}}$
- la droite (d_2) passe par les points $A(-3;0)$ et $B(4;5)$
  donc $\boldsymbol{(d_2): y=\frac{5}{7}x+\frac{15}{7}}$
- la droite (d_3) passe par les points $A(0;5)$ et $B(1;0)$
  donc $\boldsymbol{(d_3): y=-5x+5}$
- la droite (d_4) passe par les points $A(3;2)$ et $B(2;4)$
  donc $\boldsymbol{(d_4): y=-2x+8}$

équations de cercles :



- le cercle (C_1) a pour équation $\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=4}$
- le cercle (C_2) a pour équation $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2=1}$
- le cercle (C_3) a pour équation $\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2=9}$

Ex 3 **: (***) - 3 pts** – *Droites paramétriques*

Soit $m\in\mathbb{R}$ et (D_m) la droite d'équation $m^2x+(m-1)y+3=0$

a) $B(1;2)\in(D_m)$ donc n obtient $m^2\times1+(m-1)\times2+3=0$
donc $m^2+2m+1=0$ ainsi $\Delta=0$, il y a 1 solution
on obtient $\boldsymbol{m=-1}$

b) Un vecteur directeur de la droite (D_m) est $\vec{v}\begin{pmatrix}1-m\\m^2\end{pmatrix}$

donc les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-m\\m^2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux

donc $1-m-2m^2=0$ donc $2m^2+m-1=0$

ainsi $\Delta=9>0$, il y a 2 solutions donc $\boldsymbol{m=0{,}5}$ ou $\boldsymbol{m=-1}$

c) La droite (D_m) est parallèle à la droite (d) d'équation $2x-y+3=0$ donc leurs vecteurs directeurs sont colinéaires

un vecteur directeur de (D_m) est $\vec{v}\begin{pmatrix}1-m\\m^2\end{pmatrix}$

un vecteur directeur de (d) est $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

donc on obtient $\begin{vmatrix}1-m & 1\\ m^2 & 2\end{vmatrix}=0$

donc $2(1-m)-m^2=0$ donc $m^2+2m-2=0$

ainsi $\Delta=12>0$, il y a 2 solutions

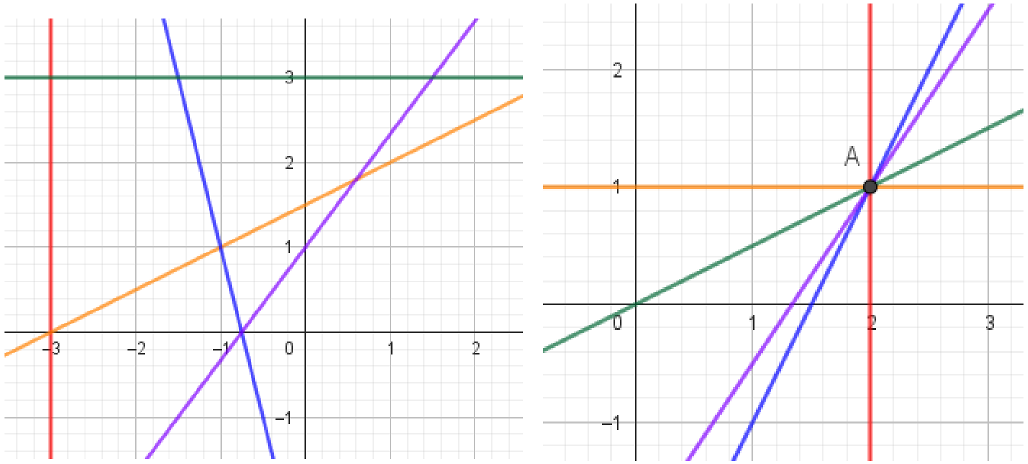
$$m=\frac{-2-\sqrt{12}}{2}=\boldsymbol{-1-\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad m=\frac{-2+\sqrt{12}}{2}=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}}$$

d) Soit (Δ_m) la droite : $(m+1)x-my-m-2=0$

donc $m(x-y-1)+x-2=0\,(*)$ ainsi pour $x-y-1=x-2=0$

l'équation (*) est valide pour tout $m\in\mathbb{R}$ donc $A(2;1)\in(\Delta_m)$

Figure de (D_m) et (Δ_m) pour les valeurs de $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$



Ex 1 **: (*) - 3 pts –** *Calculs de produits scalaires ;*

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chaque figure en détaillant votre raisonnement

Fig 1

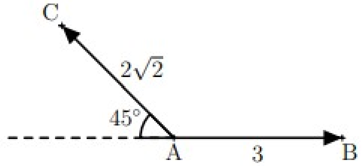


Fig 2

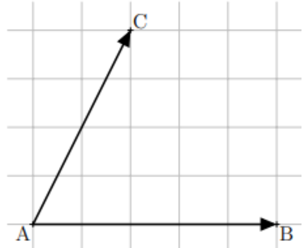


Fig 3

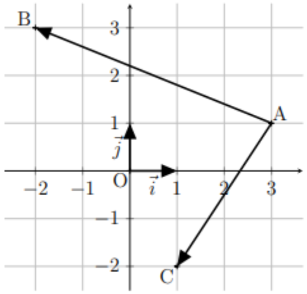


Fig 4

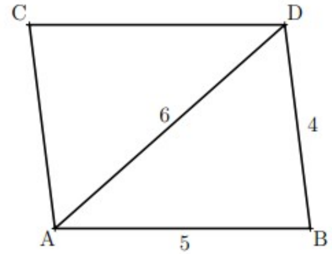


figure 1 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times2\sqrt{2}\times\cos(135°)=\boldsymbol{-6}$

figure 2 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times2=\boldsymbol{6}$

figure 3 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=10-6=\boldsymbol{4}$

figure 4 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AD^2-AB^2-AC^2)=0{,}5(36-25-16)=\boldsymbol{-2{,}5}$

Ex 2 **: (**) - 3 pts –** *Calculs d'angles dans un repère*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(1;1)$, $B(4;-2)$ et $C(5;2)$ (aucune figure n'est demandée)

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

2) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 - 3 = \mathbf{9}$$

3) Calculer les longueurs AB et AC

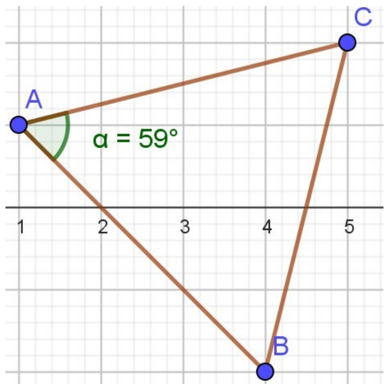
$$AB = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \quad et \quad AC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

4) En déduire la mesure en degrés de $\widehat{BAC}$

on sait que $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

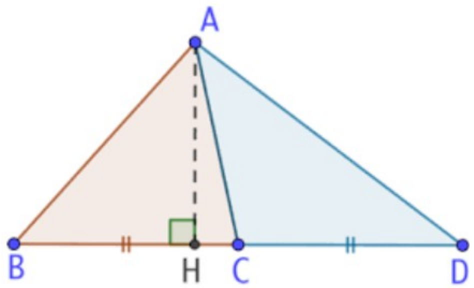
donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{9}{3\sqrt{2} \times \sqrt{17}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

donc $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{34}}{34}\right) \simeq 59°$



Ex 3* : (**) - 5 pts – *Relations métriques dans le triangle

On considère un triangle ABD tel que $AB = 6$, $AD = 8$ et $\widehat{BAD} = 100°$; C est le milieu de $[BD]$ et H est le pied de la hauteur issue de A



1) Calculer la longueur BD

d'après la relation d'*Al-Kashi* :

$$BD^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(100°)$$

donc $BD^2 \simeq 116{,}67$

donc $BD \simeq \mathbf{10{,}8}$

2) Calculer les angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{ADB}$

d'après la relation « *des Sinus* » :

$$\frac{\sin(\widehat{BAD})}{BD} = \frac{\sin(\widehat{ABD})}{AD} \quad \text{donc} \quad \frac{\sin(100°)}{10{,}8} = \frac{\sin(\widehat{ABD})}{8}$$

donc $\sin(\widehat{ABD}) = \dfrac{8 \times \sin(100°)}{10{,}8} \simeq 0{,}7295$

donc $\widehat{ABD} = \sin^{-1}(0{,}7295) \simeq 46{,}8°$ car $\widehat{ABD} < 90°$

on déduit alors que $\widehat{ADB} \simeq \mathbf{33{,}2°}$

3) Calculer la médiane AC

d'après le *théorème de la médiane* : $AB^2 + AD^2 = 2\,AC^2 + \dfrac{BD^2}{2}$

donc $36 + 64 = 2\,AC^2 + \dfrac{10{,}8^2}{2}$

donc $AC^2 = 20{,}84$ donc $AC \simeq \mathbf{4{,}57}$

4) Calculer la hauteur AH

on a $\sin(\widehat{ABD}) = \sin(\widehat{ABC}) = \sin(\widehat{ABH}) = \dfrac{AH}{AB}$

donc $AH = 6 \times \sin(46{,}8°)$ donc $AH \simeq \mathbf{4{,}37}$

5) Calculer l'aire du triangle ABD

Méthode 1 :

$$Aire_{ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin(\widehat{BAD})$$

donc $Aire_{ABD} = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin(100°) \simeq \mathbf{23{,}6}$

Méthode 2:

$$Aire_{ABD} = \frac{BD \times AH}{2} = \frac{10{,}8 \times 4{,}37}{2} \simeq \mathbf{23{,}6}$$

Méthode 3 :

$$Aire_{ABD} = \frac{1}{2} \times det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$$

on sait que AB=6 et AH=4,37 donc $BH = \sqrt{6^2 - 4{,}37^2} \simeq 4{,}11$

donc

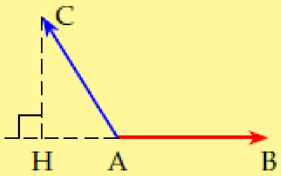
$$Aire_{ABD} = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 10{,}8 & 4{,}11 \\ 0 & 4{,}37 \end{vmatrix} = 0{,}5 \times (10{,}8 \times 4{,}37 - 0 \times 4{,}11) \simeq \mathbf{23{,}6}$$

Formulaire – Produits Scalaires

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

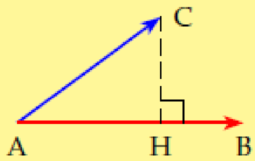
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sens contraire :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ même sens :



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$

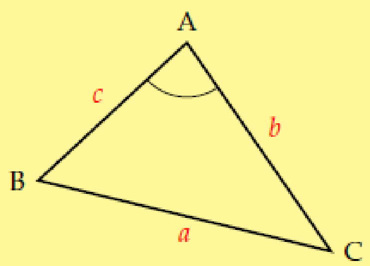
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' \overset{\text{notation matricielle}}{\iff} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Avec a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



Formulaire – Droites & Cercles

Une droite est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$

Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$d\ :\ ax + by + c = 0, \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ non tous nuls.}$$

Un vecteur directeur de la droite d est alors $\vec{u}(-b\,;\,a)$

Toute droite d, non verticale, admet une équation de la forme :

$$d\ : y = mx + p \quad \text{où } \vec{u}(1\,;m) \text{ est vecteur directeur de } d$$

- Si $d\ :\ ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a\,;\,b)$ vecteur normal à d.
- Réciproquement si un vecteur $\vec{n}(a\,;\,b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d, alors $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d.

L'équation cartésienne d'un cercle, $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon r est de la forme :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Un cercle de diamètre [AB] est caractérisé par : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$