# Le produit scalaire

dans le plan

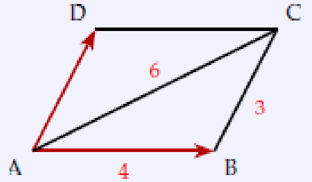
### 1re définition : définition normative

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et lu « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ » tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\right)$$

**Remarque :** Cette définition mesure le défaut d'orthogonalité entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit ABCD un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



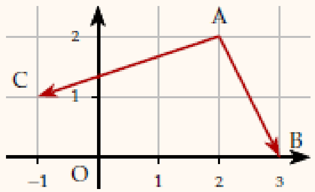

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{AD}||^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)=\frac{11}{2}$$

### 2e définition : définition analytique

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est égal à :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=xx'+yy'$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$



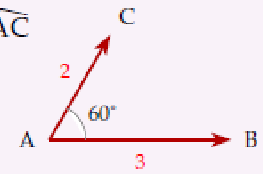

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=1(-3)+(-2)(-1)=-1$$

### 3e définition : définition projective

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\&=3\times2\times\cos 60^\circ\\&=6\times\frac{1}{2}=3\end{aligned}$$




**Remarque :**

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\Leftrightarrow\widehat{BAC}<90^\circ$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0\Leftrightarrow\widehat{BAC}>90^\circ$$

### Propriétés algébriques du produit scalaire

- Commutativité : $\forall\,\vec{u},\,\vec{v}$

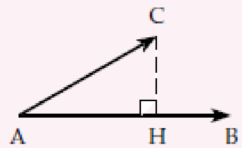
  $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ car $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\vec{v},\vec{u})$
- Bilinéarité : $\forall\,\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}$ et $\forall a,\,b\in\mathbb{R}$

  $\vec{u}\,(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v})=ab\times\vec{u}\cdot\vec{v}$

### Théorème de la projection

Soit H la projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$$




### Détecteur d'angle droit

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

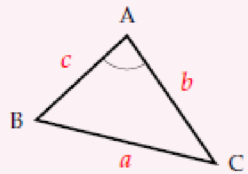
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{v}\\\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont portés par des droites}\\\text{perpendiculaires}\end{cases}$$

### Relation d'Al-Kashi

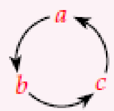
Généralisation du théorème de Pythagore.

$a$, $b$ et $c$ sont les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

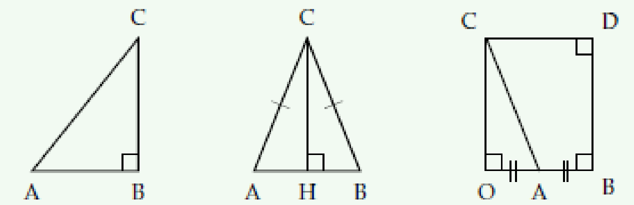



Par permutation circulaire :




- $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\widehat{B}$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

### Quelques applications de la projection




$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2$ $\qquad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB^2$ $\qquad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB^2$