

Coordonnées d'un vecteur, du milieu, distance

Soit un repère quelconque (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

- les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} vérifient :
notation matricielle : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- les coordonnées de I milieu de $[AB]$:

$$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$$

- ⚠ Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Application du déterminant

Soit les points $M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \begin{vmatrix} 5 - (-1) & 3 - (-1) \\ 10 - 1 & 7 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \\ = 36 - 36 = 0$$

Les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} sont colinéaires et donc les points M, N et P sont alignés.

Test de colinéarité

Soit un repère quelconque (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Remarque : les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles

Les vecteurs

Le point de vue analytique

Opération avec la notation matricielle

Soit un repère quelconque (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit k un réel.

Soit deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

$$\bullet k\vec{u} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

$$\bullet \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Application équations de droites

Soit les droites d et d' d'équations respectives :
 $d : 7x - 3y + 2 = 0$ et $d' : 5x - 2y - 8 = 0$.

Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d et d' .

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$$

Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires et donc les droites d et d' sont sécantes

Équation cartésienne d'une droite

Soit un repère quelconque (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit un point $A(x_A; y_A)$ et un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque de la droite d passant par A et de vecteur directeur \vec{u} . On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

La droite d a pour équation : $ax + by + c = 0$
avec $c = -(ax_A + by_A)$