Ex 1 : calculs de produits scalaires élémentaires

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\times3=\mathbf{-12}$ car les vecteurs sont colinéaires

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,5\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$
$=0,5\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)=0,5(16+36-49)=\mathbf{1,5}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\times2=\mathbf{-4}$ en projetant $\overrightarrow{AC}$ sur (AB)

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=2\times(-2)+4\times4=\mathbf{8}$ avec un repère « naturel »

e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times6\times\cos(45°)=\mathbf{15\sqrt{2}}$

f) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(-2)\times1+(-3)\times(-1)=\mathbf{1}$

Ex 2 : calculs de produits scalaires avec les propriétés algébriques

a) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=CD^2=\mathbf{4}$ en projetant $\overrightarrow{CA}$ sur (CD)

b) $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times2=\mathbf{2}$ en projetant $\overrightarrow{BE}$ sur (CB)

c) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times2=\mathbf{2}$ en projetant $\overrightarrow{CO}$ sur (CB)

Ex 3 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB})\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})$
$=AH^2+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$
$=AB^2-BH^2+0+0+(-1)\times3$
$=9-1-3=\mathbf{5}$

Ex 4 : calculs de produits scalaires avec les propriétés algébriques

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-2\times2=\mathbf{-4}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-2\times2=\mathbf{-4}$

c) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AO}=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\mathbf{-2}$

d) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$

Ex 5 : calculs de produits scalaires avec les angles géométriques

a) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}=4\times4\times\cos(60°)=\mathbf{8}$

b) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=4\times4\times\cos(60°)=\mathbf{8}$

c) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EC}=4\times4\times\cos(150°)=\mathbf{-8\sqrt{3}}$

d) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=4\times4\times\cos(45°)=\mathbf{8\sqrt{2}}$

Ex 6 : calculs de produits scalaires avec les propriétés algébriques

a) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-2)=\mathbf{-4}$

c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\mathbf{-6}$

d) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DA}=-2\times2\times\cos(60°)=\mathbf{-1}$

e) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DB}=2\times(-2)=\mathbf{-4}$

f) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=-2\times2\times\cos(120°)=\mathbf{2}$

Ex 7 : calculs de produits scalaires avec les normes

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=2\times5\times\cos(150°)=\mathbf{-5\sqrt{3}}$

b) $(\vec{v}-\vec{u})\cdot(\vec{u}+3\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\|\vec{u}\|^2+3\|\vec{v}\|^2-3\vec{u}\cdot\vec{v}=-5\sqrt{3}-4+75+15\sqrt{3}=\mathbf{71+10\sqrt{3}}$

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=4-10\sqrt{3}+25=29-10\sqrt{3}$
donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\mathbf{\sqrt{29-10\sqrt{3}}}$

d) $\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2=(\vec{u}-2\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2=4+20\sqrt{3}+100=104+20\sqrt{3}$
donc $\|\vec{u}-2\vec{v}\|=\mathbf{\sqrt{104+20\sqrt{3}}}$

Ex 8 : étude d'un angle particulier

1) $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}=32+18=\mathbf{50}$

2) $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\mathbf{50}$ à l'aide d'une décomposition vectorielle bien choisie …

3) $\cos(\alpha)=\cos(\widehat{IDJ})=\dfrac{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ}}{DI\times DJ}=\dfrac{50}{\sqrt{52}\times\sqrt{73}}=\dfrac{25}{\sqrt{949}}$ donc $\alpha\simeq\mathbf{35,75°}$