***Ex 1* : (*) -** On considère la loi de probabilité d'une v.a. X :

k	-2	-1	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,2	a

1) Calculer la valeur de a
   $\sum p_k=1$ donc $0,8+a=1$ donc $a=0,2$

2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ puis $\sigma(X)$
   $E(X)=-2\times0,1+(-1)\times0,2+1\times0,3+2\times0,2+3\times0,2=0,9$
   $V(X)=4\times0,1+1\times0,2+1\times0,3+4\times0,2+9\times0,2-0,81=2,69$
   $\sigma(X)=\sqrt{2,69}\simeq1,64$

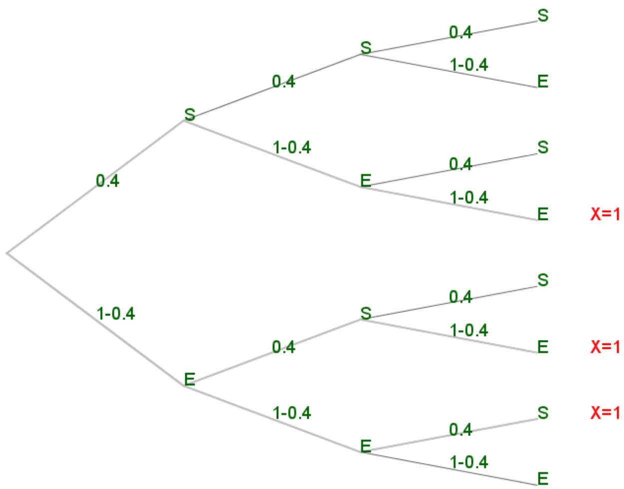
***Ex 2* : (*) -** On considère la loi de probabilité d'une v.a. X :

k	-2	-1	1	2	3
p_k	0,25	0,3	0,15	a	b

1) Calculer les valeurs de a et b si $E(X)=0$
   $\sum p_k=1$ donc $a+b=0,3$
   $E(X)=0$ donc $-0,5-0,3+0,15+2a+3b=0$ donc $2a+3b=0,65$
   donc $2a+3(0,3-a)=0,65$ donc $a=0,25$ et $b=0,05$

2) Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$
   $V(X)=4\times0,25+1\times0,3+1\times0,15+4\times0,25+9\times0,05-0=2,9$
   $\sigma(X)=\sqrt{2,9}\simeq1,703$

***Ex 3* : (**) -**
arbre pondéré



1) Déterminer la loi de probabilité de X
   $p(X=0)=0,6^3=0,216$
   $p(X=1)=3\times0,6^2\times0,4=0,432$
   $p(X=2)=3\times0,6\times0,4^2=0,288$
   $p(X=3)=0,4^3=0,064$

2) Calculer $E(X)$, $V(X)$ puis $\sigma(X)$
   $E(X)=0\times0,216+1\times0,432+2\times0,288+3\times0,064=1,2$
   on trouve $V(X)=0,72$ et $\sigma(X)\simeq0,85$

3) Reprendre cet exercice avec 4 lancers successifs
   on obtient les résultats suivants

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

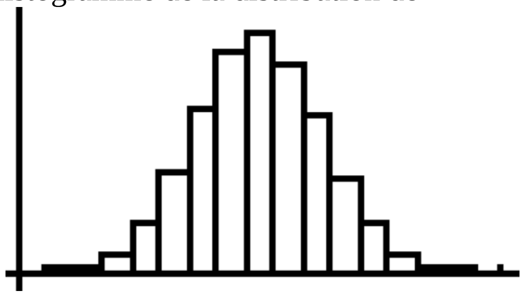
$E(X)=1,6$; $V(X)=0,96$ et $\sigma(X)\simeq0,98$

***Ex 4* : (**) -** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,4$

1) a) Calculer $p(X=3)$; $p(X=17)$; $p(X=10)$
   $p(X=3)=\binom{20}{3}\times0,4^3\times0,6^{17}\simeq0,0123$
   $p(X=17)=\binom{20}{17}\times0,4^{17}\times0,6^3\simeq0,00005$
   $p(X=10)=\binom{20}{10}\times0,4^{10}\times0,6^{10}\simeq0,117$

   b) Calculer $p(X\leqslant1)$; $p(X\geqslant18)$; $p(X\leqslant15)$ et $p(X\geqslant10)$
   avec la calculatrice on obtient :
   $p(X\leqslant1)\simeq0,000524$; $p(X\geqslant18)=1-0,99999=0,00001$
   $p(X\leqslant15)\simeq0,999$; $p(X\geqslant10)=1-0,755=0,245$

2) Construire l'histogramme de la distribution de X



***Ex 5 :* (***) -**L'expérience consiste à lancer deux dés à 4 faces, un bleu et un rouge, que l'on suppose équilibrés. Soit a le résultat obtenu par le dé bleu et b le résultat obtenu par le rouge. On considère (E) : $a x^2+b x+1=0$

1) Combien d'équations différentes obtient-on ?

	1	2	3	4
1	1-1	2-1	3-1	4-1
2	1-2	2-2	3-2	4-2
3	1-3	2-3	3-3	4-3
4	1-4	2-4	3-4	4-4

$x^2+x+1=0(0)$; $2x^2+x+1=0(0)$;
$3x^2+x+1=0(0)$; $4x^2+x+1=0(0)$;
$x^2+2x+1=0(1)$; $2x^2+2x+1=0(0)$;
$3x^2+2x+1=0(0)$; $4x^2+2x+1=0(0)$;
$x^2+3x+1=0(2)$; $2x^2+3x+1=0(2)$;
$3x^2+3x+1=0(0)$; $4x^2+3x+1=0(0)$;
$x^2+4x+1=0(2)$; $2x^2+4x+1=0(2)$;
$3x^2+4x+1=0(2)$; $4x^2+4x+1=0(1)$;

2) On note X la v.a. représentant le nombre de solutions de (E)
   a) Déterminer la loi de probabilité de X

k	0	1	2
p_k	9/16	1/8	5/16

   b) Calculer $E(X), V(X)$ puis $\sigma(X)$

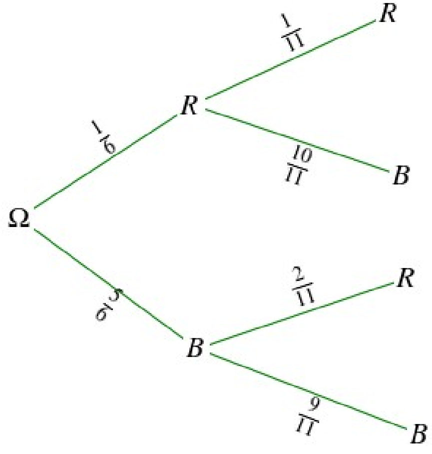
$$E(X)=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{5}{16}=\frac{3}{4}$$

$$E(X)=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{1}{8}+4\times\frac{5}{16}-\frac{9}{16}=\frac{13}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{13}{16}}\simeq 0{,}9$$

***Ex 6 :* (**) -** Une urne contient 2 boules rouges et n boules blanches avec $n\geqslant 1$; Les boules sont indiscernables. On prélève au hasard 2 boules de l'urne <u>sans remise</u> ; soit la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur

- Si elle est rouge, on gagne 10€
- Si elle est blanche, on perd 1€



1) On suppose dans cette question qu'il y a 10 boules blanches ($n=10$)
   a) Déterminer la loi de probabilité de X

$$p(X=-2)=p(B\cap B)=\frac{5}{6}\times\frac{9}{11}=\frac{15}{22}$$

$$p(X=9)=p(R\cap B)+p(B\cap R)=\frac{1}{6}\times\frac{10}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}=\frac{10}{33}$$

$$p(X=20)=p(B\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$$

   b) Calculer l'espérance de X ; ce jeu est-il équitable ?

$$E(X)=(-2)\times\frac{15}{22}+9\times\frac{10}{33}+20\times\frac{1}{66}=\frac{5}{3}$$ donc le jeu est gagnant

   c) Déterminer l'intervalle de confiance du gain du joueur

$$V(X)=4\times\frac{15}{22}+81\times\frac{10}{33}+400\times\frac{1}{66}-\frac{25}{9}=\frac{275}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{275}{9}}\simeq 5{,}53$$ donc $I_C=[-3{,}86\,;7{,}20]$

2) On suppose maintenant que n est un entier positif quelconque.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X

$$p(X=-2)=p(B\cap B)=\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$p(X=9)=p(R\cap B)+p(B\cap R)=\frac{4n}{(n+1)(n+2)}$$

$$p(X=20)=p(B\cap B)=\frac{40}{(n+1)(n+2)}$$

   b) Exprimer $E(X)$ en fonction de n on obtient

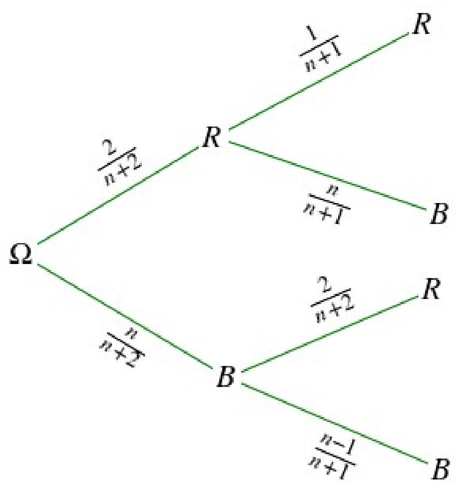
$$E(X)=\frac{-2n^2+38n+40}{(n+1)(n+2)}$$

   c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?

$E(X)=0$ donne

$-2n^2+38n+40=0$

$n=20$ avec le dsicriminant



d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X)\geqslant 0$?

donc $-2n^2+38n+40\geqslant 0$

donc $n^2-19n-20\leqslant 0$

on obtient $n\in[0;20]$

e) Calculer n pour avoir $E(X)=2$

donc $\dfrac{-2n^2+38n+40}{(n+1)(n+2)}=2$ donc $-2n^2+38n+40=2(n+1)(n+2)$

donc $-2n^2+38n+40=2n^2+6n+4$

donc $4n^2-32n-36=0$

donc $n^2-8n-9=0$

on obtient $n=9$

Vers la Terminale spé maths – Théorie du dénombrement

***Ex 7 :* (*) -** Construire le triangle de PASCAL permettant de calculer les valeurs des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $0\leqslant k\leqslant 8$ et $0\leqslant n\leqslant 8$

p =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n =0	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

1) Déterminer les développements suivants :

$A=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$B=(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$C=(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$D=(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

2) Déterminer les factorisations suivants :

$E=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$F=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$G=a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$H=a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

***Ex 9* : (**) -** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\binom{9}{3}=\binom{9}{6}$ VRAI par symétrie du triangle de PASCAL

b) $\binom{8}{4}=2\binom{4}{2}$ FAUX car le binôme de NEWTON n'est pas linéaire

c) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{10}{5}$ FAUX car le binôme de NEWTON n'est pas linéaire

d) $\binom{9}{5}=3\binom{8}{5}$ FAUX car on obtient $126\neq 3\times 56$

e) $\binom{7}{1}=7$ VRAI par définition du binôme de NEWTON

***Ex 10* : (***) -** Démontrer les relations suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$; on sait que $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times a^k\times b^{n-k}$

donc $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^k\times 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ de même $0^n=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times(-1)^k\times 1^{n-k}$

c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$ d) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$

soit $P=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}$ et $I=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}$

alors $I+P=2^n$ et $I-P=0$ d'après a) et b) donc $I=P$

donc $2P=2^n$ donc $I=P=2^{n-1}$