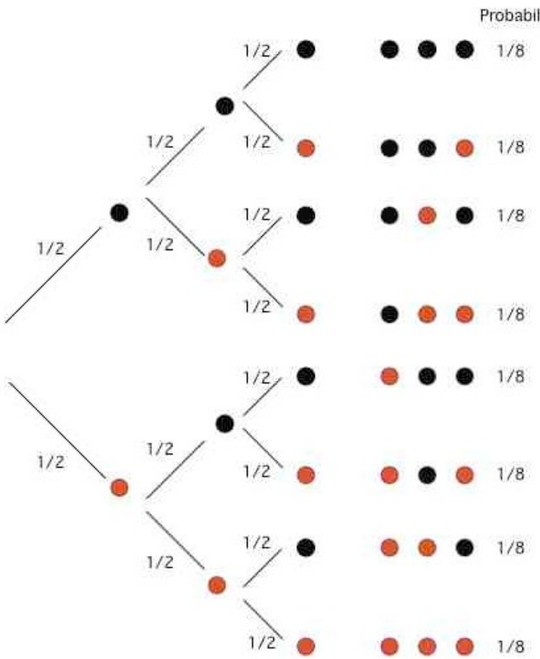
SOS maths **TD – Variables aléatoires– *corrigé*** **Mars 2024**

Ex 1 : on pose le PILE en **NOIR** et le FACE en **ROUGE** ; on obtient l'arbre pondéré ci-dessous ; l'univers de X est : $X(\Omega)=\{-8;-3;+2;+7\}$



Loi de X :

$p(X=-8)=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

$p(X=-3)=\dfrac{3}{8}=0{,}375$

$p(X=+2)=\dfrac{3}{8}=0{,}375$

$p(X=+7)=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

$E(X)=-8\times0{,}125-3\times0{,}375+2\times0{,}375+7\times0{,}125=-0{,}5$

$V(X)=(-8)^2\times0{,}125+(-3)^2\times0{,}375+2^2\times0{,}375+7^2\times0{,}125-(-0{,}5)^2=18{,}75$

$\sigma(X)=\sqrt{18{,}75}\simeq4{,}33$

interprétation : en moyenne le jeu sera perdant avec une fluctuation des gains algébriques entre -4,83 € et +3,83 € par parties

Ex 2 : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$ car il y a entre 0 et 3 faces peintes

$p(X=0)=\dfrac{1}{27}$; $p(X=1)=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$; $p(X=2)=\dfrac{12}{27}=\dfrac{4}{9}$; $p(X=3)=\dfrac{8}{27}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{27}+1\times\dfrac{2}{9}+2\times\dfrac{4}{9}+3\times\dfrac{8}{27}=2$

$V(X)=0^2\times\dfrac{1}{27}+1^2\times\dfrac{2}{9}+2^2\times\dfrac{4}{9}+3^2\times\dfrac{8}{27}-2^2=\dfrac{2}{3}$

donc $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\simeq0{,}816$ ainsi en moyenne il y a 2 faces peintes et l'intervalle de confiance est de $[1{,}184;2{,}816]$

Ex 3 : on a le tableau croisé suivant

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$X(\Omega)=\{0;1;2;3;4;5\}$

$p(X=0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$; $p(X=1)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

$p(X=2)=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$; $p(X=3)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

$p(X=4)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$; $p(X=5)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{5}{18}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{9}+5\times\dfrac{1}{18}=\dfrac{35}{18}\simeq1{,}94$

$V(X)=0^2\times\dfrac{1}{6}+1^2\times\dfrac{5}{18}+2^2\times\dfrac{2}{9}+3^2\times\dfrac{1}{6}+4^2\times\dfrac{1}{9}+5^2\times\dfrac{1}{18}-\left(\dfrac{35}{18}\right)^2=\dfrac{665}{324}$

donc $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{665}{324}}\simeq1{,}43$ en moyenne on obtient 1,94 point ± 1,43

Ex 4 : on obtient $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=a$ donc $p_6=1-5a$ et $p_6=2a$ donc $a=\dfrac{1}{7}$ ainsi $X(\Omega)=\{1;2;3;4;5;6\}$

$p(X=1)=p(X=2)=p(X=3)=p(X=4)=p(X=5)=\dfrac{1}{7}$ et $p(X=6)=\dfrac{2}{7}$

$E(X)=(1+2+3+4+5)\times\dfrac{1}{7}+6\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{27}{7}\simeq3{,}86$

$V(X)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\times\dfrac{1}{7}+6^2\times\dfrac{2}{7}-\left(\dfrac{27}{7}\right)^2=\dfrac{160}{49}$

donc $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{160}{49}}\simeq1{,}807$ en moyenne on obtient 3,86 point ± 1,807

Ex 5 : on construit un arbre pondéré (4 générations)
$X(\Omega)=\{0;1;2;3;4\}$;

S → noire ; E → blanche

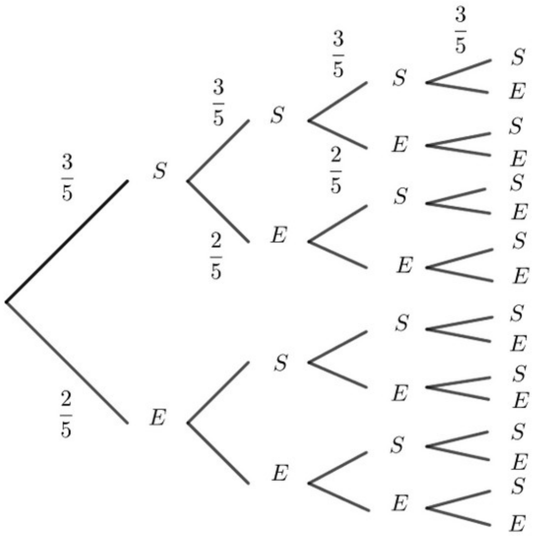
$p(X=-4)=0{,}6^4=0{,}1296$

$p(X=-1)=4\times0{,}4\times0{,}6^3=0{,}3456$

$p(X=+2)=6\times0{,}4^2\times0{,}6^2=0{,}3456$

$p(X=+5)=4\times0{,}4^3\times0{,}6=0{,}1536$

$p(X=+8)=0{,}4^4=0{,}0256$



$E(X)=0{,}8$; $V(X)=8{,}64$;
$\sigma(X)\simeq2{,}94$ donc en moyenne sur
10 parties on gagne 8€ ± 3 €

Ex 6 : on a $X(\Omega)=\{-6;-1;+4\}$ (aucune mise n'est demandée)

$$p(X=-6)=\frac{n}{n+6}\times\frac{n-1}{n+5}=\frac{n^2-n}{(n+6)(n+5)}$$

$$p(X=-1)=\frac{6}{n+6}\times\frac{n}{n+5}+\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}=\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$$

$$p(X=+4)=\frac{6}{n+6}\times\frac{5}{n+5}=\frac{30}{(n+6)(n+5)}$$

$$E(X)=(-6)\times\frac{n^2-n}{(n+6)(n+5)}+(-1)\times\frac{12n}{(n+6)(n+5)}+4\times\frac{30}{(n+6)(n+5)}$$

on obtient $E(X)=\dfrac{-6n^2-6n+120}{(n+6)(n+5)}$

ainsi le jeu est équitable si $n^2+n-20=0$ donc $\Delta=81$ donc $n=4$ (car $n\neq-5$)

le jeu est perdant si $n^2+2-20>0$ donc pour $n\geqslant5$

enfin le jeu est gagnant si $n^2+n-20<0$ donc pour $n\in\{0;1;2;3\}$

Ex 7 : on a $X(\Omega)=\{-(n+1)^2;2(n+1)^2\}$

$$p(X=-(n+1)^2)=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$

$$p(X=2(n+1)^2)=\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{2n}{(n+1)^2}$$

$$E(X)=-(n+1)^2\times\frac{n^2+1}{(n+1)^2}+2(n+1)^2\times\frac{2n}{(n+1)^2}=-n^2+4n-1$$

le jeu est favorable au joueur si $E(X)>0$
donc si $n^2-4n+1<0$

or le polynôme $p(x)=x^2-4x+1$ s'annule pour les valeurs réelles
$x=2+\sqrt{3}\simeq3{,}73$ et $x=2-\sqrt{3}\simeq0{,}26$
(on utilise la méthode du discriminant)

de plus $x^2-4x+1<0$ si $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

donc le jeu est favorable si $n\in\{1;2;3\}$
