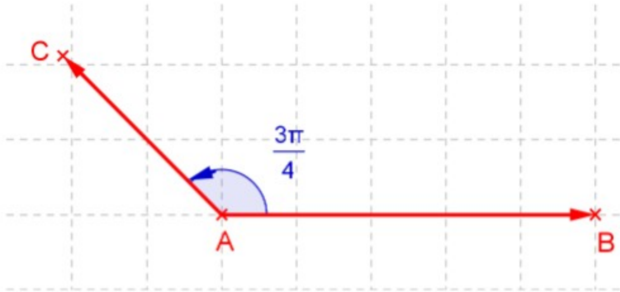
Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC =3 et $\widehat{BAC}=\dfrac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{3\pi}{4}$$

Or, $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=5\times3\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=2$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-7$ et $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{6}$.

Déterminer $\|\vec{v}\|$.

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

$$-7=2\times\|\vec{v}\|\times\cos\frac{\pi}{6}$$

Or, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, $-7=\sqrt{3}\|\vec{v}\|$ $\|\vec{v}\|=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-7\sqrt{3}}{3}$

Exercice 3

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}4-1\\-2-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}2-1\\-1-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=3\times1+(-5)\times(-4)=23$

2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}=MN\times MP\times\cos\widehat{NMP}$

Or,

MN²=3²+(-5)²=9+25=34, donc $MN=\sqrt{34}$

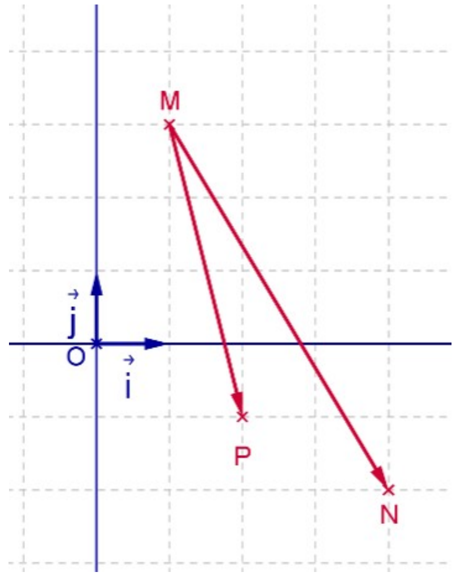
MP²=1²+(-4)²=1+16=17, donc $MP=\sqrt{17}$

Donc,

$23=\sqrt{34}\times\sqrt{17}\times\cos\widehat{NMP}$

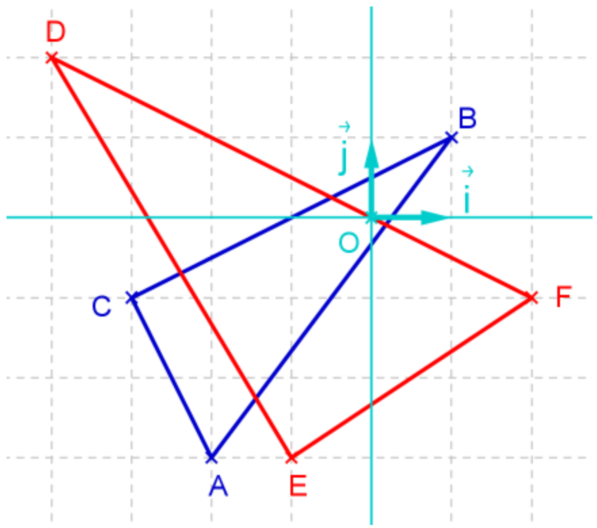
$23=\sqrt{34\times17}\times\cos\widehat{NMP}$

$23=17\sqrt{2}\times\cos\widehat{NMP}$



$\cos\widehat{NMP}=\dfrac{23}{17\sqrt{2}}$ On obtient $\widehat{NMP}\approx16{,}9^{\circ}$

Exercice 4



Le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2+3\\-3+1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1+3\\1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=1\times4+(-2)\times2=4-4=0$

Donc le triangle ABC est rectangle en C.

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-4+1\\2+3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2+1\\-1+3\end{pmatrix}$

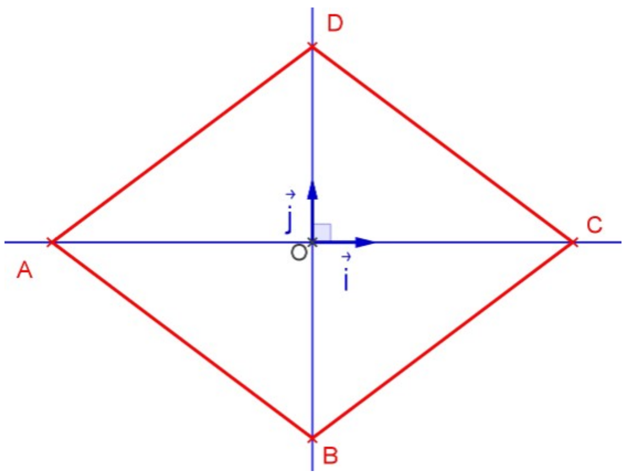
$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EF}=-3\times3+5\times2=1\neq0$

Donc le triangle EDF n'est pas rectangle en E.

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



1) Calculs des produits scalaires

a. O est le pied de la hauteur du triangle ADC issue de D, donc :
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}=AC\times AO\times\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AO})=8\times4\times1=32$

b. O est le pied de la hauteur du triangle OBC issue de C, donc :
$\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}^2=BO^2=3^2=9$

c. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ car ABCD est un losange, donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$
Dans le triangle rectangle OAB, j'utilise le théorème de Pythagore :
$AB^2=OA^2+OB^2$
$AB^2=4^2+3^2$
$AB^2=16+9$
$AB^2=25$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=25$

d. O est le pied de la hauteur du triangle DBC issue de C, donc :
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BO}=BD\times BO\times\cos(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BO})=6\times3\times1=18$

2) Calculs des produits scalaires

A(-4;0) $\quad$ B(0;-3) $\quad$ C(4;0) $\quad$ D(0;3)

a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4\times4+(-3)\times3=16-9=7$

b. $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BA}=4\times(-4)+0\times3=-16$

c. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=4\times4+3\times(-3)=16-9=7$