

Exercice 1 : Etude d'une suite

Partie 1 : Généralités.

1. Il s'agit dans cette question 1 de justifier la légitimité de la construction par récurrence de la suite « associée à α ». Un terme de la suite n'admet un successeur que s'il est positif.

Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n : \ll u_n \geq 0 \gg$ est vérifiée pour tout entier naturel n .

Initialisation : $u_0 = \alpha \geq 0$ par hypothèse, ce qui montre que \wp_0 est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n , la propriété $\wp_n : \ll u_n \geq 0 \gg$ soit vérifiée.

Alors, puisque la fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}^+ et prend ses valeurs dans ce même ensemble, le nombre $\sqrt{u_n}$ existe et est supérieur ou égal à 0.

Il en résulte que : $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \geq 0$ (positif car somme de deux nombres positifs)

Si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété \wp_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 0$.

Tous les termes de la suite associée à α sont positifs.

2. Soit deux réels tels que $\beta \geq \alpha \geq 0$ et les suites (v_n) et (u_n) qui leur sont respectivement associées (la positivité des nombres α et β garantit l'existence de ces suites qui sont des suites de nombres positifs.)

Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n : \ll v_n \geq u_n \gg$ est vérifiée pour tout entier naturel n .

Initialisation : $v_0 = \beta \geq \alpha = u_0$ par hypothèse, ce qui montre que \wp_0 est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n , la propriété $\wp_n : \ll v_n \geq u_n \gg$ soit vérifiée.

Alors, puisque la fonction racine carrée est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ , elle conserve le sens des inégalités :

$$v_n \geq u_n \implies \sqrt{v_n} \geq \sqrt{u_n} \text{ et en conséquence : } v_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{v_n} \geq \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} = u_{n+1}$$

Si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété \wp_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout entier naturel $n : v_n \geq u_n$

3. Soit (w_n) la suite associée à 0. Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n : \ll w_n \geq 1 \gg$ est vérifiée pour tout entier strictement positif n .

Initialisation : $w_1 = \frac{1}{0+1} + \sqrt{0} = 1$ ce qui montre que \wp_1 est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier strictement positif n , la propriété \wp_n : « $w_n \geq 1$ » soit vérifiée.

Alors, puisque la fonction racine carrée est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ , elle conserve le sens des inégalités :

$$w_n \geq 1 \implies \sqrt{w_n} \geq \sqrt{1} = 1 \text{ et en conséquence : } w_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{w_n} \geq \frac{1}{n+1} + 1 \geq 1$$

Si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété \wp_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout entier strictement positif n : $w_n \geq 1$

NB. Si tous les termes de la suite associée à 0 sont ≥ 1 , alors d'après la **question 2** il en est de même de tous les termes de toute suite (u_n) associée à un réel positif donné α puisqu'une telle suite majore (w_n) . Pour tout entier naturel n : $u_n \geq w_n \geq 1$.

4. Supposons que la suite (u_n) associée à un réel positif donné α soit convergente vers un réel ℓ . D'après la remarque de la question précédente : $\ell \geq 1$.

Passons à la limite dans la relation de récurrence, en tenant compte que la limite d'une suite ne dépend pas d'un décalage d'indexation :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{u_n})$$

D'une part $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$ et d'autre part, la fonction racine carrée étant continue sur \mathbb{R}^+ , donc en particulier

$$\text{en } \ell, \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{u_n}) = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n} = \sqrt{\ell}.$$

Il en résulte que le nombre ℓ est solution de l'équation $\ell = \sqrt{\ell}$. Cette équation ayant pour solutions 0 et 1, la seule possibilité dans ce contexte est $\ell = 1$.

Si la suite (u_n) associée à un réel positif donné α est convergente, alors elle converge vers 1.

5. Considérons la suite (u_n) associée à un réel positif donné α . Etudions les différences de deux termes consécutifs de cette suite, en écrivant à leur propos une relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+2} + \sqrt{u_{n+1}} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \right) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + (\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}) \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{(u_{n+1} - u_n)}{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}} \end{aligned}$$

Déterminons une condition pour que la propriété \wp_n : « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » soit vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n , la propriété \wp_n : « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » soit vérifiée.

Alors, nous avons aussi $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$ car $u_{n+2} - u_{n+1}$ est dans ce cas la somme des deux nombres réels

$$\text{négatifs, } -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ et } \frac{(u_{n+1} - u_n)}{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}$$

Si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire.

Initialisation :

Remarquons d'abord que $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le lecteur pourra vérifier que $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Evaluons la différence entre les deux premiers termes de cette suite : $u_1 - u_0 = (1 + \sqrt{\alpha}) - \alpha$

Cette différence est la valeur en $b = \sqrt{\alpha}$ du trinôme du second degré T défini par : $T(b) = -b^2 + b + 1$.

Or, ce trinôme T a deux racines, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et se factorise en : $T(b) = -\left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Il est strictement négatif quand $b > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lorsque $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, nous avons $\sqrt{\alpha} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $u_1 - u_0 = T(\sqrt{\alpha}) < 0$. En conséquence \wp_0 est vérifiée.

Ainsi, la condition $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ permet l'initialisation au rang 0 de la propriété \wp_n : « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ».

Lorsque $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, la propriété \wp_n : « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » est vérifiée pour tout entier naturel n , la suite associée à α est alors une suite décroissante.

Une telle suite étant décroissante et minorée par 1 est convergente. Elle converge donc vers 1, seule limite possible.

Considérons maintenant une suite (u_n) associée à un réel $\alpha \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. D'après la question 2, elle est majorée par n'importe quelle suite associée à un réel $> \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (par exemple celle qui est associée à 3).

(u_n) est donc encadrée par la suite constante 1 (d'après la question 3) et par une suite qui converge vers 1.

D'après le théorème des gendarmes, elle converge vers 1.

Ainsi, toute suite (u_n) associée à un nombre positif α converge vers 1, que $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou non.

Partie 2 : Un cas particulier.

Un algorithme pour avoir une petite idée du comportement de la suite étudiée.

```
>>> def suitethé(m):
    t=4
    for n in range(1,m+1):
        t=sqrt(t)+1/n
        x=1+2/n-t
        y=1+3/n-t
        print("n=",n,"t=",t,"x=",x,"y=",y)

>>> suitethé(10)
n= 1 t= 3.0 x= 0.0 y= 1.0
n= 2 t= 2.232050807568877 x= -0.2320508075688772 y= 0.2679491924311228
n= 3 t= 1.8273382890041225 x= -0.16067162233745602 y= 0.17266171099587746
n= 4 t= 1.6017907711639854 x= -0.10179077116398538 y= 0.14820922883601462
n= 5 t= 1.4656187305677746 x= -0.06561873056777467 y= 0.1343812694322255
n= 6 t= 1.3772940786179138 x= -0.043960745284580494 y= 0.12270592138208625
n= 7 t= 1.3164388735507975 x= -0.030724587836511885 y= 0.11213255502063113
n= 8 t= 1.2723617012741872 x= -0.02236170127418724 y= 0.10263829872581276
n= 9 t= 1.2391012268808315 x= -0.016879004658609142 y= 0.0942321064525018
n= 10 t= 1.2131492383687066 x= -0.013149238368706628 y= 0.08685076163129346
```

6. NB. Dans cette question, nous admettons et utiliserons un encadrement de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ qui est l'encadrement, pour tout réel x positif : $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n : \left\langle 1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n} \right\rangle$ est vérifiée pour tout entier strictement positif n .

Initialisation : En consultant les résultats affichés par l'algorithme précédent, nous constatons que \wp_k est vérifiée pour tout entier n allant de 1 à 10.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_n : \left\langle 1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n} \right\rangle$ soit vérifiée pour un certain entier strictement positif n .

Compte tenu de la relation de récurrence $t_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{t_n}$ et du fait que la fonction racine carrée conserve

le sens des inégalités, nous obtenons l'encadrement : $\frac{1}{n+1} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq t_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}$.

Compte tenu de l'encadrement admis :

- D'une part : $1 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} - \frac{1}{8} \times \frac{4}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n}}$
- D'autre part : $\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \leq 1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{n} = 1 + \frac{3}{2n}$

De sorte que : $1 + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leq t_{n+1} \leq 1 + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2n}\right)$

- D'une part : $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{2n^2(n+1)}$, ce qui est ≥ 0 pour tout $n \geq 1$.
- D'autre part : $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2n}\right) - \frac{3}{n+1} = \frac{3}{2n} - \frac{2}{n+1} = -\frac{n-3}{2n(n+1)}$ ce qui est ≤ 0 pour tout $n \geq 3$.

En conséquence nous obtenons pour $n \geq 3$ les deux inégalités simultanément :

$$1 + \frac{2}{n+1} \leq 1 + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leq t_{n+1} \leq 1 + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2n}\right) \leq 1 + \frac{3}{n+1}$$

Lorsque $n \geq 3$, si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire à partir du rang 3.

Etant initialisée aux rangs 1, 2 et 3 et héréditaire à partir du rang 3, cette propriété \wp_n est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout entier strictement positif n : $1 + \frac{2}{n} \leq t_n \leq 1 + \frac{3}{n}$

```

>>> def suitehé(m):
    t=4
    for n in range(1,m+1):
        t=sqrt(t)+1/n
        z=1+2/n+6/(n**2)-t
        print("n=",n,"t=",t,"z=",z)

>>> suitehé(10)
n= 1 t= 3.0 z= 6.0
n= 2 t= 2.232050807568877 z= 1.2679491924311228
n= 3 t= 1.8273382890041225 z= 0.5059950443292105
n= 4 t= 1.6017907711639854 z= 0.2732092288360146
n= 5 t= 1.4656187305677746 z= 0.17438126943222532
n= 6 t= 1.3772940786179138 z= 0.12270592138208625
n= 7 t= 1.3164388735507975 z= 0.09172439175532476
n= 8 t= 1.2723617012741872 z= 0.07138829872581276
n= 9 t= 1.2391012268808315 z= 0.057195069415464816
n= 10 t= 1.2131492383687066 z= 0.046850761631293425

```

7. Un algorithme pour avoir une petite idée de ce qu'il se passe dans cette question.

L'inégalité $1 + \frac{2}{n} \leq t_n$ déjà obtenue implique que $2 \leq n(t_n - 1)$, c'est-à-dire que $2 \leq s_n$ pour tout $n \geq 1$.

Il reste à démontrer que $n(t_n - 1) = s_n \leq 2 + \frac{6}{n}$, inégalité équivalente à : $t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$.

Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n : « t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} »$ est vérifiée pour tout entier strictement positif n .

Initialisation : En consultant les résultats affichés par l'algorithme précédent, \wp_k est vérifiée pour tout entier n allant de 1 à 10.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_n : « t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} »$ soit vérifiée pour un certain entier strictement positif n .

Compte tenu de la relation de récurrence $t_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{t_n}$ et du fait que la fonction racine carrée conserve

le sens des inégalités, nous obtenons l'encadrement : $t_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}}$.

Compte tenu de la majoration admise sur la fonction racine carrée :

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} \right) = 1 + \frac{n+3}{n^2} \text{ de sorte que : } t_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n+3}{n^2}$$

Comparons le nombre $\frac{1}{n+1} + \frac{n+3}{n^2}$ avec le nombre $\frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$ en étudiant le signe de la différence

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n+3}{n^2} \right) - \left(\frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2} \right)$$

La copie d'écran ci-contre montre que cette différence est égale à $\frac{2n^2-7n-3}{n^2 \cdot (n+1)^2}$ et qu'elle est négative pour tout entier $n \geq 4$.

Lorsque $n \geq 4$, nous obtenons :

$$t_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$$

Define $x(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{n+3}{n^2}$	Terminé
Define $y(n) = \frac{2}{n+1} + \frac{6}{(n+1)^2}$	Terminé
Δ $x(n) - y(n)$	$\frac{n+3}{n^2} - \frac{n+7}{(n+1)^2}$
Δ getNum $\left(\frac{n+3}{n^2} - \frac{n+7}{(n+1)^2} \right)$	$(-2 \cdot n^2 - 7 \cdot n - 3)$
factor $(-2 \cdot n^2 - 7 \cdot n - 3, n)$	$\frac{-(4 \cdot n + \sqrt{73} - 7) \cdot (4 \cdot n - \sqrt{73} - 7)}{8}$
solve $(-2 \cdot n^2 - 7 \cdot n - 3) < 0, n)$	$n < \frac{-(\sqrt{73} - 7)}{4}$ or $n > \frac{\sqrt{73} + 7}{4}$
$\frac{\sqrt{73} + 7}{4}$	3.886
4	

Lorsque $n \geq 4$, si \wp_n est vérifiée, alors \wp_{n+1} l'est aussi, la propriété \wp_n est héréditaire à partir du rang 4.

Etant initialisée aux rangs 1, 2, 3 et 4 et héréditaire à partir du rang 4, cette propriété \wp_n est vérifiée pour tout

entier $n \geq 1$. Pour tout entier strictement positif n : $t_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$.

Il est équivalent de dire que $s_n \leq 2 + \frac{6}{n}$ et finalement $2 \leq s_n \leq 2 + \frac{6}{n}$ pour tout entier strictement positif n .

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n(t_n - 1) - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - 2) = 2$ d'après le théorème des gendarmes appliqué à

la suite (s_n) minorée par 2 et majorée par une suite convergeant vers 2.

9. Traitée en cours de route.

La suite converge bien sûr vers 1 !

10. Soit α un réel positif et (u_n) sa suite associée. Considérons la propriété \wp_n : « $1 + \frac{2}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ ».

Hérédité. Par rapport à ce que nous avons vu à la **question 8**, rien ne change, cette propriété est héréditaire à partir du rang 4.

<p>Cette propriété peut-elle être initialisée ?</p> <p>Cas de l'inégalité : $u_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$</p> <p>L'algorithme ci-contre montre que cette inégalité est initialisée au rang 4 lorsque $\alpha \leq 400$ mais non lorsque $\alpha = 500$.</p> <p>Soit désormais un entier n_0 au moins égal à 4</p>	<pre>>>> def suitecg(a,m): for n in range(1,m+1): a=sqrt(a)+1/n print(n,a) >>> suitecg(400,4) 1 21.0 2 5.08257569495584 3 2.587790184762484 4 1.8586609912478402 >>> suitecg(500,4) 1 23.360679774997898 2 5.333288712150134 3 2.6427247493020802 4 1.8756459483239516 >>> 15/8 1.875</pre>
--	--

Pour tout entier strictement positif n : $u_n = \frac{1}{n} + \sqrt{u_{n-1}} < \sqrt{u_{n-1}}$. Posons $M(n_0) = 1 + \frac{2}{n_0} + \frac{6}{n_0^2}$.

Successivement : $u_0 < (M(n_0))^{2^{n_0}} \Rightarrow u_1 < \sqrt{u_0} < (M(n_0))^{2^{n_0-1}}$

$u_1 < (M(n_0))^{2^{n_0-1}} \Rightarrow u_2 < \sqrt{u_1} < (M(n_0))^{2^{n_0-2}}$;

....

$u_{n_0-1} < (M(n_0))^{2^1} \Rightarrow u_{n_0} < \sqrt{u_{n_0-1}} < M(n_0)$;

Ainsi l'inégalité : $u_0 < (M(n_0))^{2^{n_0}}$ assurerait que l'inégalité $u_n \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}$ est initialisée au rang n_0 .

Vu que $(M(n_0))^{2^{n_0}}$ peut être rendu aussi grand qu'on veut (il est plus grand que $1 + \frac{2}{n_0} \times 2^{n_0}$), quelle que soit la valeur initiale α , il existe un rang n_0 qui initialise l'inégalité.

<p>Cas de l'inégalité $1 + \frac{2}{n} \leq u_n$</p> <p>L'algorithme appliqué pour $\alpha = 0$ montre que cette inégalité est initialisée au rang 5. Elle est initialisée à ce rang pour tout $\alpha \geq 0$</p>	<pre>>>> suitecg(0,5) 1 1.0 2 1.5 3 1.5580782047249222 4 1.4982300287707078 5 1.4240220703772901</pre>
---	---

On peut conclure comme dans la **question 8** que pour tout $\alpha \geq 0$ la suite associée est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n - 1 - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = 2$$

Exercice 2 : Les bonbons cachés

Partie 1 : Sophie et Germain testent les trois boîtes.

1. Notons B l'évènement « Sophie choisit la boîte contenant les bonbons » et \bar{B} son évènement contraire : « Sophie choisit une des deux boîtes n'en contenant pas ».

Vu qu'il y a équiprobabilité du choix de chacune des trois boîtes : $P(B) = \frac{1}{3}$

2.a. Si Sophie ne modifie pas son choix, le jeu précédent n'est pas modifié. $P(B) = \frac{1}{3}$

2.b. Supposons que Sophie modifie son choix et change sa boîte. Notons B_1 l'évènement « Sophie choisit au premier tour la boîte contenant les bonbons », évènement dont la probabilité est égale à $\frac{1}{3}$ d'après la question précédente, et \bar{B}_1 l'évènement « Sophie choisit la boîte contenant les bonbons à l'issue du jeu »

Nous avons : $P_{B_1}(B) = 0$ car si B_1 est réalisé, au second tour Sophie échange la boîte gagnante contre une vide et $P_{\bar{B}_1}(B) = 1$ car si B_1 n'est pas réalisé, au second tour Sophie échange sa boîte vide contre la boîte gagnante, l'autre boîte vide étant éliminée.

$$\text{Dans ce protocole : } P(B) = P(B_1) \times P_{B_1}(B) + P(\bar{B}_1) \times P_{\bar{B}_1}(B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

2.c. Le second protocole est plus avantageux pour Sophie puisqu'elle double ses chances de gagner.

Partie 2 : Une stratégie pour Sophie

On reprend la notation B_1 de la partie 1.

3.a. Vu qu'il y a équiprobabilité du choix de chacune des n boîtes : $P(B_1) = \frac{1}{n}$.

3.b. Si Sophie ne modifie pas son choix : $P(B) = P(B_1) = \frac{1}{n}$ car le second tour n'a aucune influence.

Si Sophie modifie son choix, il ne reste que deux boîtes au second tour. Nous avons toujours $P_{B_1}(B) = 0$ et $P_{\bar{B}_1}(B) = 1$. Dans ce protocole : $P(B) = P(B_1) \times P_{B_1}(B) + P(\bar{B}_1) \times P_{\bar{B}_1}(B) = \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n} \times 1 = \frac{n-1}{n}$

Pour tout entier $n \geq 3$, l'inégalité $\frac{n-1}{n} > \frac{1}{n}$ est vérifiée.

Sophie a toujours intérêt à modifier son choix.

4.a. Si Sophie ne modifie pas son choix : $P(B) = P(B_1) = \frac{1}{n}$ car les tours suivants n'ont aucune influence.

4.b. Si Sophie conserve son choix à chaque tour sauf au dernier où elle change son choix, ce protocole revient à éliminer $(n - 2)$ boîtes vides successivement. Il est équivalent au protocole de la question 3.b. La probabilité de gagner est la même qu'en 3.b.

En gardant *toujours la même boîte* jusqu'au dernier tour (où elle l'échange) Sophie s'assure de gagner avec une probabilité exactement égale à $\frac{n-1}{n}$.

Partie 4 : Une stratégie commune

Je propose une méthode basée sur des congruences et cousine du « théorème chinois », méthode permettant de déterminer le numéro de la boîte contenant les bonbons sans pour autant le « communiquer ».

On choisit deux nombres premiers p et q distincts et supérieurs ou égaux à 3 et on pose $n = p \times q$

Les entiers de 1 à $n = p \times q$ sont caractérisés par leurs restes dans les divisions euclidiennes par p et par q .

Sophie choisit la boîte numéro n et la garde jusqu'à connaître le numéro de la boîte contenant les bonbons.

En éliminant seulement deux boîtes, Germain peut arriver à coder le numéro b de la boîte où se trouvent les bonbons :

- La première boîte porte un numéro congru à b modulo p
- La deuxième boîte porte un numéro congru à b modulo q

Ci-dessous un algorithme Python et son application avec $p = 3 ; q = 5$. On constate que cet algorithme fonctionne non seulement pour $n = 3 \times 5 = 15$ mais aussi pour les valeurs de n telles que $11 \leq n \leq 15$.

On pourrait vérifier qu'avec $p = 5 ; q = 7$ l'algorithme fonctionne pour $15 \leq n \leq 35$ et qu'avec $p = 7 ; q = 13$ l'algorithme fonctionne pour $27 \leq n \leq 91$

```
>>> def bonbons(p, q):
    for b in range(1, p*q+1):
        i=1
        while i%p!=b%p:
            i=i+1
        if i==b:
            i=i+p
        j=1
        while j%q!=b%q:
            j=j+1
        if j==i or j==b:
            j=j+q
        print("si bonbons dans", b, "restes", b%p, "et", b%q,
              "Germain enlève la boîte", i, "puis la boîte", j)
```

```
>>> bonbons(3,5)
si bonbons dans 1 restes 1 et 1 Germain enlève la boîte 4 puis la boîte 6
si bonbons dans 2 restes 2 et 2 Germain enlève la boîte 5 puis la boîte 7
si bonbons dans 3 restes 0 et 3 Germain enlève la boîte 6 puis la boîte 8
si bonbons dans 4 restes 1 et 4 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 9
si bonbons dans 5 restes 2 et 0 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 10
si bonbons dans 6 restes 0 et 1 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 1
si bonbons dans 7 restes 1 et 2 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 2
si bonbons dans 8 restes 2 et 3 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 3
si bonbons dans 9 restes 0 et 4 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 4
si bonbons dans 10 restes 1 et 0 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 5
si bonbons dans 11 restes 2 et 1 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 1
si bonbons dans 12 restes 0 et 2 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 2
si bonbons dans 13 restes 1 et 3 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 3
si bonbons dans 14 restes 2 et 4 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 4
si bonbons dans 15 restes 0 et 0 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 5
```

Avec $p = 3 ; q = 7$, l'algorithme fonctionne pour $15 \leq n \leq 21$:

```
>>> bonbons(3,7)
si bonbons dans 1 restes 1 et 1 Germain enlève la boîte 4 puis la boîte 8
si bonbons dans 2 restes 2 et 2 Germain enlève la boîte 5 puis la boîte 9
si bonbons dans 3 restes 0 et 3 Germain enlève la boîte 6 puis la boîte 10
si bonbons dans 4 restes 1 et 4 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 11
si bonbons dans 5 restes 2 et 5 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 12
si bonbons dans 6 restes 0 et 6 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 13
si bonbons dans 7 restes 1 et 0 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 14
si bonbons dans 8 restes 2 et 1 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 1
si bonbons dans 9 restes 0 et 2 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 2
si bonbons dans 10 restes 1 et 3 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 3
si bonbons dans 11 restes 2 et 4 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 4
si bonbons dans 12 restes 0 et 5 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 5
si bonbons dans 13 restes 1 et 6 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 6
si bonbons dans 14 restes 2 et 0 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 7
si bonbons dans 15 restes 0 et 1 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 1
si bonbons dans 16 restes 1 et 2 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 2
si bonbons dans 17 restes 2 et 3 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 3
si bonbons dans 18 restes 0 et 4 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 4
si bonbons dans 19 restes 1 et 5 Germain enlève la boîte 1 puis la boîte 5
si bonbons dans 20 restes 2 et 6 Germain enlève la boîte 2 puis la boîte 6
si bonbons dans 21 restes 0 et 0 Germain enlève la boîte 3 puis la boîte 7
```

On peut faire mieux :

Solution proposée par N.I.E. (élève de Terminale et participant au concours 2024) :

Pour tout $n \geq 4$:

- Sophie choisit la boîte 4. Si c'est la bonne, Germain ôte la boîte 1, sinon il ôte une des boîtes 2 ou 3 (il en faut deux au cas où une des deux serait la bonne).
- Si Sophie a la boîte correcte elle la garde jusqu'à la fin, et sinon elle garde sa "mauvaise boîte" et l'échange au dernier tour avec la bonne.

Exercice 3 : Intersections et réunions

Partie 1 : Quelques cas particuliers

1.a. Par définition, $\text{ent}(x)$ est l'unique entier tel que : $\text{ent}(x) \leq x < \text{ent}(x)+1$ (**1**)

En retranchant 1 à chaque membre de cette double inégalité : $\text{ent}(x) - 1 \leq x - 1 < \text{ent}(x)$ (**1'**).

Des deux doubles inégalités, on déduit : $x - 1 < \text{ent}(x) \leq x$.

1.b. Sous les hypothèses de cette question :
$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq y < 1 \\ x = n + y \end{cases} \implies \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n + 1 \\ y = x - n \end{cases}$$

Par définition des parties entière et fractionnaire et compte tenu de l'unicité de la partie entière :

$$\begin{cases} n = \text{ent}(x) \\ y = \text{frac}(x) \end{cases}$$

2.a. $\mathcal{E}(1) = \left\{ \text{ent}\left(\frac{1}{1}\right)=1 ; \text{ent}\left(\frac{2}{1}\right)=2 ; \text{ent}\left(\frac{3}{1}\right)=3 ; \dots \right\}$ est par construction inclus dans \mathbb{N}^* . Réciproquement, tout entier strictement positif k appartient à $\mathcal{E}(1)$ puisque $k = \text{ent}\left(\frac{k}{1}\right)$, ce qui justifie que $\mathbb{N}^* \subset \mathcal{E}(1)$.

$$\mathcal{E}(1) = \mathbb{N}^*$$

2.b. Supposons que $x > 1$ et soit n un entier strictement positif. $\mathcal{E}(x)$ est par construction inclus dans \mathbb{N} .

Réciproquement, pour tout entier naturel n , l'intervalle $[nx ; (n+1)x[$ a pour longueur x , c'est-à-dire une longueur strictement plus grande que 1. Cet intervalle contient donc au moins un entier :

L'ensemble des entiers K tels que $nx \leq K < (n+1)x$ est non vide. Soit alors K un tel entier. Il vérifie la double inégalité : $n \leq \frac{K}{x} < n+1$ et de ce fait : $\text{ent}\left(\frac{K}{x}\right)=n$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathcal{E}(x)$ car il existe toujours au moins un entier K tel que : $\text{ent}\left(\frac{K}{x}\right)=n$, ce qui justifie l'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathcal{E}(x)$ comme dans la question précédente. On peut déduire de **2.a** et **2.b** que :

$$\text{Si } x > 1, \text{ alors } \mathcal{E}(x) = \mathbb{N}$$

3.a. Si le plus grand des deux réels α ou β est exactement égal à 1, l'ensemble qui lui est associé est égal à \mathbb{N}^* , l'un des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ ou $\mathcal{E}(\beta)$ est déjà égal à \mathbb{N}^* et contient l'autre ensemble.

$$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N}^* \text{ et } \mathcal{E}(\alpha) \cap \mathcal{E}(\beta) \neq \emptyset. \text{ La propriété } P_U \text{ est vérifiée, } P_\cap \text{ ne l'est pas.}$$

3.b. Si $\max(\alpha, \beta) > 1$, l'ensemble qui lui est associé est égal à \mathbb{N} et contient l'autre ensemble.

$$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N} \neq \mathbb{N}^* \text{ et } \mathcal{E}(\alpha) \cap \mathcal{E}(\beta) \neq \emptyset. \text{ Les propriétés } P_U \text{ et } P_\cap \text{ ne sont pas vérifiées.}$$

4.a. Soit x un réel quelconque, n un entier strictement positif et k un entier naturel.

Par définition de la partie fractionnaire d'un nombre, si on considère le réel kx : $0 \leq \text{frac}(kx) < 1$.

Donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq n \times \text{frac}(kx) < n$

$$\begin{cases} 0 \leq n \times \text{frac}(kx) \Rightarrow \text{ent}(n \times \text{frac}(kx)) \geq 0 \\ n \times \text{frac}(kx) < n \Rightarrow \text{ent}(n \times \text{frac}(kx)) \leq n - 1 \end{cases}$$

Les deux inégalités impliquent : $\text{ent}(n \times \text{frac}(kx)) \in \{0 ; 1 ; \dots ; n - 1\}$.

4.b. Considérons la liste $\{\text{ent}(n \times \text{frac}(jx)) ; j = 0, 1, \dots, n\}$ obtenue avec les parties entières des $(n + 1)$ premiers multiples entiers de x .

Elle est composée de $(n + 1)$ termes, tous appartenant, d'après la question précédente, au même ensemble de n nombres, l'ensemble $\{0 ; 1 ; \dots ; n - 1\}$.

Vu que la liste a une unité de plus que le cardinal de l'ensemble dans lequel elle prend ses valeurs, il y a au moins deux termes de la liste $\{\text{ent}(n \times \text{frac}(jx)) ; j = 0, 1, \dots, n\}$ qui sont égaux.

Il existe deux entiers distincts $0 \leq k < \ell \leq n$ tels que $\text{ent}(n \times \text{frac}(\ell x)) = \text{ent}(n \times \text{frac}(kx))$.

4.c. Désignons par E le nombre : $E = \text{ent}(n \times \text{frac}(\ell x)) = \text{ent}(n \times \text{frac}(kx))$. Compte tenu de la définition de la partie entière :

$$\begin{cases} E \leq n \times \text{frac}(\ell x) < E + 1 \\ E \leq n \times \text{frac}(kx) < E + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < n \times \text{frac}(\ell x) - n \times \text{frac}(kx) < 1$$

Nous obtenons la double inégalité : $-\frac{1}{n} < \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$.

Suivant le signe de $\text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$, ce nombre a pour partie entière 0 ou -1 , ce qui influe sur l'expression de sa partie fractionnaire :

- Si $0 \leq \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$, alors $\text{frac}(mx) = \text{frac}(\ell x - kx) = \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx)$ et dans ce cas : $\text{frac}(mx) \in \left[0 ; \frac{1}{n}\right[$.
- Si $-\frac{1}{n} < \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < 0$, alors $\text{frac}(mx) = \text{frac}(\ell x - kx) = 1 + \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx)$ et dans ce cas : $\text{frac}(mx) \in \left]1 - \frac{1}{n} ; 1\right[$.

En multipliant par l'entier strictement positif u nous obtenons : $u - \frac{u}{u+1} > u \times \text{frac}(mx) \geq u - 1$

Remarquons au passage que $u - \frac{u}{u+1} = u - 1 + \frac{1}{u+1}$

Décomposons : $mx = \text{ent}(mx) + \text{frac}(mx)$ en somme de ses parties entière et fractionnaire.

En multipliant par u : $umx = u \times \text{ent}(mx) + u \times \text{frac}(mx)$. Nous obtenons l'encadrement :

$$u \times \text{ent}(mx) + u - 1 + \frac{1}{u+1} > umx \geq u \times \text{ent}(mx) + u - 1$$

Cette double inégalité montre que :

- $\text{ent}(umx) = u \times \text{ent}(mx) + u - 1$.
- $0 \leq \text{frac}(umx) < \frac{1}{u+1}$, donc *a fortiori* $0 \leq \text{frac}(umx) < \frac{1}{n}$, puisque $u \geq n$

4.e. En synthèse des questions **4.c** et **4.d** ou bien $\text{frac}(mx) \in \left[0 ; \frac{1}{n}\right[$, ou bien $\text{frac}(umx) \in \left[0 ; \frac{1}{n}\right[$. Quel que soit le cas de figure, **on a obtenu un entier v tel que $\text{frac}(vx) \in \left[0 ; \frac{1}{n}\right[$** . Il s'agit soit de m lui-même soit de l'entier um construit au **4.d**.

5. Dans cette question $\alpha = \frac{p}{q}$ est un rationnel et β un réel tous deux strictement compris entre 0 et 1.

Leurs inverses sont rus deux strictement supérieurs à 1.

5.a. Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations de cette question, choisissons un entier n tel que $n > \frac{q}{\varepsilon}$ (ce qui permettra d'avoir l'inégalité $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{q}$)

Appliquons la conclusion de la **question 4.e** avec le nombre $x = \frac{1}{\beta}$.

Il existe un entier strictement positif v tel que $\text{frac}\left(\frac{v}{\beta}\right) \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$.

Si on note k la partie entière de ce nombre : $k \leq \frac{v}{\beta} < k + \frac{1}{n} < k + \frac{\varepsilon}{q}$

En multipliant par q : $kq \leq \frac{vq}{\beta} < kq + \varepsilon$. Nous obtenons l'inégalité voulue en posant $\ell = vq$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad kq \leq \frac{\ell}{\beta} < kq + \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon < 1$, on en déduit qu'il existe des multiples de q qui appartiennent à $\mathcal{E}(\beta)$.

5.b. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $p < q$

$\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{ \text{ent}\left(\frac{kq}{p}\right), k \in \mathbb{N}^* \right\}$. Lorsque k est un multiple de p , $\frac{kq}{p}$ est un entier multiple de q . L'ensemble $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ contient l'ensemble des multiples de q .

La **question 4.b** a montré que certains d'entre eux appartiennent à $\mathcal{E}(\beta)$.

La propriété P_\cap n'est pas satisfaite.

D'autre part, puisque $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ contient l'ensemble des multiples de p , en revanche il ne contient aucun entier de la forme $k = mq - 1$. En effet, l'écart entre $\frac{(mp) \times q}{p}$ et $\frac{(mp-1) \times q}{p}$ est égal à $\frac{q}{p}$. Cet écart est strictement supérieur à 1, donc quel que soit l'entier m , $\text{ent}\left(\frac{(mp-1) \times q}{p}\right) < mq - 1$.

A propos de β , appliquons le résultat **5.a** avec un nombre tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{\beta} - 1$

$$\exists (k, \ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad kq \leq \frac{\ell}{\beta} < kq + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right). \quad \text{Alors : } kq - \frac{1}{\beta} \leq \frac{\ell-1}{\beta} < kq - 1, \quad \text{et donc } \begin{cases} \text{ent}\left(\frac{\ell}{\beta}\right) = kq \\ \text{ent}\left(\frac{\ell-1}{\beta}\right) < kq - 1 \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe des entiers de la forme $kq - 1$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{E}(\beta)$.

Ces éléments ne sont ni dans $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ ni dans $\mathcal{E}(\beta)$.

$\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right) \cup \mathcal{E}(\beta) \neq \mathbb{N}^*$: la propriété P_\cup n'est pas non plus vérifiée.

Partie 2 : Partition

6.a. Par définition de la partie entière : $\text{ent}(n\alpha) < n\alpha < \text{ent}(n\alpha) + 1$ avec des inégalités strictes car $n\alpha$ est un irrationnel qui ne peut pas être égal à sa partie entière. En conséquence : $\frac{\text{ent}(n\alpha)}{\alpha} < n < \frac{\text{ent}(n\alpha)+1}{\alpha}$.

- D'une part $\text{ent}\left(\frac{\text{ent}(n\alpha)}{\alpha}\right) \leq n - 1$ en raison de l'inégalité stricte. L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte au moins $\text{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n - 1$.
- D'autre part $\text{ent}\left(\frac{\text{ent}(n\alpha)+1}{\alpha}\right) \geq n$. L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ n'en compte pas d'autre.

L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte exactement $\text{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n - 1$.

Remarquons pour la suite de la question une propriété de la partie entière d'une somme de deux nombres ; elle est égale à la somme des parties entières éventuellement augmentée ou diminuée d'une unité :

$$\text{ent}(n(\alpha + \beta)) = \text{ent}(n\alpha + n\beta) = \begin{cases} \text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) \\ \text{ou bien} \\ \text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) + 1 \\ \text{ou bien} \\ \text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) - 1 \end{cases}$$

6.b. Supposons que $\alpha + \beta > 1$. On peut choisir l'entier n de façon que $n \times (\alpha + \beta) > n + 1$.

La somme des cardinaux de $\mathcal{E}(\alpha)$ et de $\mathcal{E}(\beta)$ est égale à $\text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) \geq \text{ent}(n(\alpha + \beta)) - 1 \geq n$.

Ces ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(\beta)$ étant tous deux inclus dans $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$ qui contient exactement $(n - 1)$ éléments, ils ont en commun au moins un élément, ils ne sont pas disjoints.

La propriété P_\cap n'est pas satisfaite.

6.c. Supposons que $\alpha + \beta < 1$. On peut choisir l'entier n de façon que $n \times (\alpha + \beta) < n - 2$.

$\text{ent}(n\alpha + n\beta) = \text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) \leq \text{ent}(n(\alpha + \beta)) < n - 2 + 1 = n - 1$. La somme des cardinaux de $\mathcal{E}(\alpha)$ et de $\mathcal{E}(\beta)$ est strictement inférieure au cardinal de $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$. La réunion de ces ensembles ne peut pas être égale à $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$.

La propriété P_\cup n'est pas satisfaite.

7.a. Supposons que α et β soient deux irrationnels de somme 1.

Auquel cas, puisque leur somme est égale à 1, pour tout entier $n > 0$: $\text{ent}(n(\alpha + \beta)) = n$

Des inégalités toutes deux nécessairement strictes $\text{ent}(n\alpha) < n\alpha$ et $\text{ent}(n\beta) < n\beta$, on déduit que $\text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) < n(\alpha + \beta) = n$

Des trois possibilités envisagées en « remarque », il n'en reste qu'une : $\text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) + 1 = n$.

Nous obtenons : $\text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) = n - 1$.

7.b. Soit n un entier strictement positif.

Nous disposons des relations : $\begin{cases} \text{ent}(n\alpha) + \text{ent}(n\beta) = n - 1 \\ \text{ent}((n + 1)\alpha) + \text{ent}((n + 1)\beta) = n \end{cases}$ d'après la question précédente.

En passant à l'entier $n + 1$, une et une seule des deux parties entières en jeu a augmenté d'une unité.

1^{er} cas : $\text{ent}((n + 1)\alpha) = \text{ent}(n\alpha) + 1$; $\text{ent}((n + 1)\beta) = \text{ent}(n\beta)$.

L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte $\text{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n - 1$, et un de plus compris entre 1 et n : c'est donc que $n \in \mathcal{E}(\alpha)$. En revanche $\mathcal{E}(\beta)$ compte autant d'éléments compris entre 1 et $n - 1$ que d'éléments compris entre 1 et n : c'est donc que $n \notin \mathcal{E}(\beta)$.

2^{ème} cas : $\text{ent}((n + 1)\alpha) = \text{ent}(n\alpha)$; $\text{ent}((n + 1)\beta) = \text{ent}(n\beta) + 1$. Il s'agit du cas « symétrique » du précédent. $n \notin \mathcal{E}(\alpha)$ et $n \in \mathcal{E}(\beta)$.

8. La **question 7** nous montre que, si α et β sont deux irrationnels de somme 1, alors tout entier n strictement positif appartient à un et un seul des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ ou $\mathcal{E}(\beta)$.

Cette question nous montre que :

Si α et β sont deux irrationnels de somme 1, alors P_\cap et P_\cup sont simultanément vérifiées.

Réciproquement, si P_\cap et P_\cup sont simultanément vérifiées, alors en vertu de la **question 6** la somme $\alpha + \beta$ ne peut être ni < 1 , ni > 1 . Elle est donc exactement égale à 1.

D'autre part, la **question 5** a montré que, si au moins l'un des deux nombres α ou β était rationnel, alors P_\cap n'était pas vérifiée. Nécessairement, ce sont deux irrationnels.

Si P_\cap et P_\cup sont simultanément vérifiées, alors α et β sont deux irrationnels de somme 1.

Partie 3 : Intersection vide

L'ensemble Ω est l'ensemble des points M dont les coordonnées sont de la forme $(k\alpha + m ; k\beta + n)$ avec k, m, n entiers relatifs.

9. Soit α et β deux irrationnels tels qu'il existe des entiers u et v strictement positifs vérifiant $au + \beta v = 1$.

Supposons que P_\cap ne soit pas vérifiée. Alors il existe deux entiers k et ℓ strictement positifs tels que : $\text{ent}\left(\frac{k}{\alpha}\right) = \text{ent}\left(\frac{\ell}{\beta}\right)$. Dans ce cas, $\text{ent}\left(\frac{k u}{u \alpha}\right) = \text{ent}\left(\frac{\ell v}{v \beta}\right)$, ce qui prouverait que $\mathcal{E}(u\alpha) \cap \mathcal{E}(v\beta) \neq \emptyset$

Or, les deux nombres $au ; \beta v$ sont irrationnels et de somme 1. Le théorème A serait mis en défaut à leur propos. L'hypothèse est à rejeter.

Si α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs u et v vérifiant $au + \beta v = 1$, alors P_\cap est vérifiée.

10. La **question 5** a montré que, si au moins l'un des deux nombres α ou β était rationnel, alors P_\cap n'était pas vérifiée. Nécessairement, **ce sont deux irrationnels.**

La **question 2** a montré que, si $\alpha \geq 1$ ou $\beta \geq 1$, alors $\mathcal{E}(\alpha) = \mathbb{N}^*$ ou, respectivement, $\mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N}^*$ et dans ce cas P_\cap ne peut pas être vérifiée. Nécessairement, **$\max(\alpha, \beta) < 1$.**

11. Les résultats de cette question sont liés aux propriétés algébriques de l'ensemble \mathbb{Z} qui est un « anneau », un groupe pour l'addition et un ensemble stable par multiplication.

11.a. Soit $A(k_A\alpha + m_A ; k_A\beta + n_A)$ et $B(k_B\alpha + m_B ; k_B\beta + n_B)$ deux points de Ω (tous les coefficients indexés sont des entiers relatifs).

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $((k_B - k_A)\alpha + (m_B - m_A) ; (k_B - k_A)\beta + (n_B - n_A))$

L'image de $M(k\alpha + m ; k\beta + n)$ par la translation $T_{\overrightarrow{AB}}$ est le point $M'((k + k_B - k_A)\alpha + (m + m_B - m_A) ; (k + k_B - k_A)\beta + (n + n_B - n_A))$. Réciproquement, M est l'image par cette translation du point $M''((k - k_B + k_A)\alpha + (m - m_B + m_A) ; (k - k_B + k_A)\beta + (n - n_B + n_A))$.

Or, en raison de la stabilité de l'ensemble \mathbb{Z} pour l'addition, les nombres k, m, n sont des entiers relatifs si et seulement si $(k + k_B - k_A), (m + m_B - m_A), (n + n_B - n_A)$ et $(k - k_B + k_A), (m - m_B + m_A), (n - n_B + n_A)$ sont des entiers relatifs :

L'image de Ω par $T_{\overrightarrow{AB}}$ est incluse dans Ω et l'image réciproque de Ω par $T_{\overrightarrow{AB}}$ (image par $T_{\overrightarrow{BA}}$) est incluse dans Ω : **L'ensemble Ω est globalement invariant par $T_{\overrightarrow{AB}}$.**

11.b. L'image de $M(k\alpha + m; k\beta + n)$ par la symétrie centrale de centre O est $M_3(-k\alpha - m; -k\beta - n)$. En raison de la stabilité de l'ensemble \mathbb{Z} pour la symétrisation (pour l'opération +), les nombres k, m, n sont des entiers relatifs si et seulement si leurs opposés sont des entiers relatifs. Un point appartient à Ω si et seulement si son symétrique par rapport à O appartient à Ω .

L'ensemble Ω est globalement invariant par la symétrie centrale de centre O .

L'image de $M(k\alpha + m; k\beta + n)$ par l'homothétie de centre O de rapport ℓ (entier relatif) est $M_4(k\ell\alpha + m\ell; k\ell\beta + n\ell)$. En raison de la stabilité de l'ensemble \mathbb{Z} pour la multiplication, si les nombres k, m, n sont des entiers relatifs alors les nombres $k\ell, m\ell, n\ell$ sont des entiers relatifs. Si un point appartient à Ω alors son homothétique appartient à Ω .

L'image de Ω par une homothétie de centre O et de rapport un entier relatif est incluse dans Ω .

12. Considérons deux points de Ω : $M_1(k_1\alpha + m_1; k_1\beta + n_1)$ et $M_2(k_2\alpha + m_2; k_2\beta + n_2)$.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1\alpha + m_1 = k_2\alpha + m_2 \\ k_1\beta + n_1 = k_2\beta + n_2 \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} (k_1 - k_2)\alpha = m_2 - m_1 \\ (k_1 - k_2)\beta = n_2 - n_1 \end{cases}$$

Or, par hypothèse α et β sont deux nombres irrationnels, tandis que $k_1 - k_2, m_2 - m_1$ et $n_2 - n_1$ sont des entiers relatifs. Ces relations ne peuvent être vérifiées que si : $k_1 - k_2 = m_2 - m_1 = n_2 - n_1 = 0$.

Un point de Ω n'admet qu'un seul triplet (k, m, n) permettant de définir ses coordonnées.

L'unicité de ce triplet légitime la définition de l'application f .

13.a. D'après l'énoncé : $k \in \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, k \leq \frac{n}{\alpha} < k + 1$ soit :

$k \in \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, k\alpha < n < (k + 1)\alpha$. Avec des inégalités strictes, le cas d'égalité $k\alpha = n$ est impossible vu que α est un nombre irrationnel.

Cette double inégalité est équivalente à : $\exists n \in \mathbb{N}^*, n < (k + 1)\alpha < n + \alpha$

Or $\alpha < 1$ et donc $n + \alpha < n + 1$.

En conséquence $\text{ent}((k + 1)\alpha) = n$; le nombre $(k + 1)\alpha - n$ représente la partie fractionnaire de $(k + 1)\alpha$ et l'inégalité de droite signifie que $(k + 1)\alpha - n < \alpha$.

$$k \in \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \text{frac}((k + 1)\alpha) < \alpha$$

13.b. On ne perd pas de vue que d'après la **question 10** : $\max(\alpha, \beta) < 1$

Supposons que le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$ contienne un point $X(k\alpha + m; k\beta + n)$ de Ω tel que $f(X) \geq 1$, c'est-à-dire tel que $k \geq 1$. Cela signifie que : $\begin{cases} 0 < k\alpha + m < \alpha \\ 0 < k\beta + n < \beta \end{cases}$ avec $k \geq 1$

Des inégalités $\begin{cases} 0 < k\alpha + m < \alpha \\ 0 < k\beta + n < \beta \end{cases}$ on déduit que $\begin{cases} 0 < \text{frac}(k\alpha + m) < \alpha \\ 0 < \text{frac}(k\beta + n) < \beta \end{cases}$.

Mais puisque m et n sont des entiers, $\begin{cases} \text{frac}(k\alpha + m) = \text{frac}(k\alpha) \\ \text{frac}(k\beta + n) = \text{frac}(k\beta) \end{cases}$

En conséquence : $\begin{cases} \text{frac}(k\alpha) < \alpha \\ \text{frac}(k\beta) < \beta \end{cases}$ donc d'après **13.a.**, $\begin{cases} k - 1 \in \mathcal{E}(\alpha) \\ k - 1 \in \mathcal{E}(\beta) \end{cases}$.

L'intersection $\mathcal{E}(\alpha) \cap \mathcal{E}(\beta)$ ne serait donc pas vide, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$ ne contient aucun point X de Ω tel que $f(X) \geq 1$.

Rappelons le théorème d'approximation de Dirichlet d'un nombre irrationnel :

Pour tout irrationnel x , il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

13.c. Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons le théorème de Dirichlet à α et β en choisissant un même dénominateur q entier strictement positif vérifiant $q > \frac{1}{\varepsilon}$:

Il existe deux entiers p et p' tels que : $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ et $\left|\beta - \frac{p'}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$

Dans ce cas : $|q\alpha - p| < \frac{1}{q} < \varepsilon$ et $|q\beta - p'| < \frac{1}{q} < \varepsilon$.

En posant $k = q$; $m = -p$; $n = -p'$, nous obtenons un point $Y(k\alpha + m ; k\beta + n)$ de Ω avec $f(Y) \geq 1$ qui appartient au carré $]-\varepsilon ; \varepsilon[\times]-\varepsilon ; \varepsilon[$.

Contenant ce point, ce carré contient aussi son symétrique par rapport à O , de coordonnées opposées : le carré contient aussi des points de Ω avec $f(Y) \leq -1$.

**Pour tout $\varepsilon > 0$, le carré $]-\varepsilon ; \varepsilon[\times]-\varepsilon ; \varepsilon[$ contient des points Y de Ω avec $f(Y) \geq 1$
et des points Y de Ω avec $f(Y) \leq -1$.**

Notons que ces points n'ont pas de coordonnées rationnelles puisque $f(Y) \neq 0$

De ce fait, le carré contient des points Y de Ω avec $f(Y) \geq n$ où n est un entier strictement positif donné. En effet, le carré $]-\frac{\varepsilon}{n} ; \frac{\varepsilon}{n}[\times]-\frac{\varepsilon}{n} ; \frac{\varepsilon}{n}[$ contient des points Y de Ω avec $f(Y) \geq 1$, et on considère leurs homothétiques par l'homothétie de centre O et de rapport n qui sont dans Ω et dans le carré $]-\varepsilon ; \varepsilon[\times]-\varepsilon ; \varepsilon[$. De même que leurs symétriques par rapport à O .

13.d. Supposons que le rectangle $]0 ; \alpha[\times]0 ; \beta[$ contienne un point M de Ω (donc nécessairement un point tel que $k = f(X) \leq 0$)

Choisissons ε de sorte que le côté du carré $]-\varepsilon ; \varepsilon[\times]-\varepsilon ; \varepsilon[$ soit plus petit que la distance de M aux bords du rectangle $]0 ; \alpha[\times]0 ; \beta[$

Soit N un point de Ω situé dans ce même carré $]-\varepsilon ; \varepsilon[\times]-\varepsilon ; \varepsilon[$ de coordonnées :

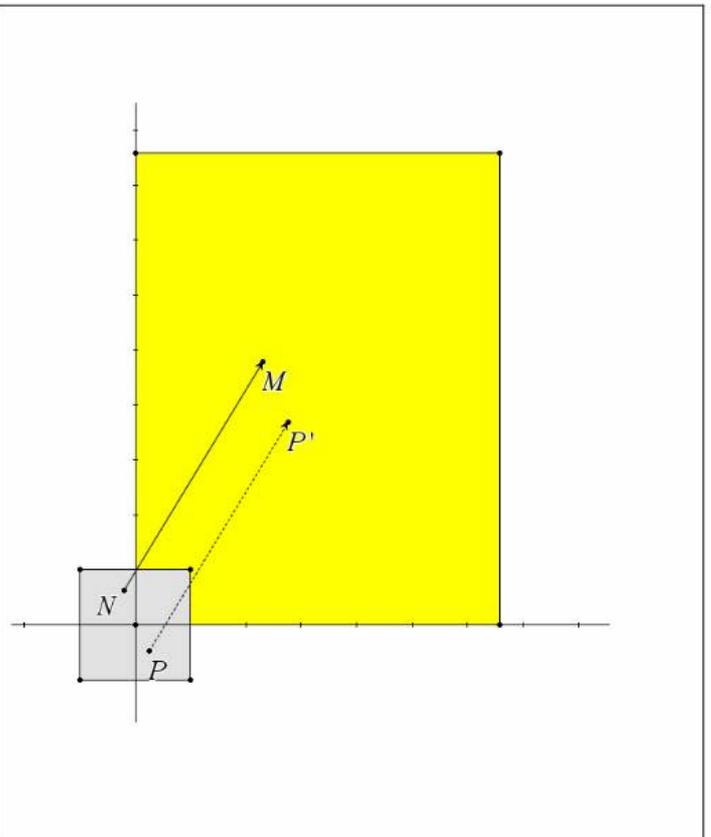
$(k_1\alpha + m_1 ; k_1\beta + n_1)$ avec $k_1 \geq 1$

Soit $P(k_2\alpha + m_2 ; k_2\beta + n_2)$ un deuxième point de Ω situé dans le même carré et choisi de sorte que $k_2 > k_1 - k$ (il en existe, voir remarque page précédente)

La translation de vecteur \overrightarrow{NM} envoie P en un point P' de Ω situé dans le rectangle $]0 ; \alpha[\times]0 ; \beta[$ et tel que : $f(P') = (k_2 + k - k_1) \geq 1$

Ce qui est contraire au résultat de la question **13.a.**

Le rectangle $]0 ; \alpha[\times]0 ; \beta[$ ne contient aucun point M de Ω .



14.a. D'après la question 13, le carré $]-\varepsilon; \varepsilon[\times]-\varepsilon; \varepsilon[$ contient au moins un point Y de Ω avec $f(Y) \neq 0$. Mais ce point ne peut appartenir ni au quadrant $]0; \varepsilon[\times]0; \varepsilon[$ (il serait dans le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$) ni non plus au quadrant $]-\varepsilon; 0[\times]-\varepsilon; 0[$ (son symétrique par rapport à O serait dans ce rectangle).

Il en résulte que ce point, ou bien son symétrique par rapport à O qui est aussi dans Ω , appartient au quadrant $]0; \varepsilon[\times]0; \varepsilon[; -\varepsilon[$.

14.b. Supposons que le rectangle $]ks; (k+2)s[\times]kt; (k-2)t[$ contienne un point $M(x; y)$ de Ω . Les coordonnées de ce point vérifient les inégalités : $ks < x \leq (k+2)s$ et $kt < y \leq (k-2)t$.

Puisque $Q(s, t)$ et l'origine du repère O appartiennent à Ω , les translatés de M par une ou plusieurs translations de vecteur $\overrightarrow{OQ} (-s; -t)$ appartiennent aussi à Ω . Il en est ainsi du point M' obtenu après k translations :

$M'(x' = x - ks; y' = y - kt)$. Les coordonnées de ce point vérifient les inégalités : $0 < x' \leq 2s$ et $0 < y' \leq -2t$. Puisque s et t sont strictement plus petits que $\frac{\min(\alpha, \beta)}{2}$, ce point est dans le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$. Nous avons vu que c'était impossible. L'hypothèse est à rejeter.

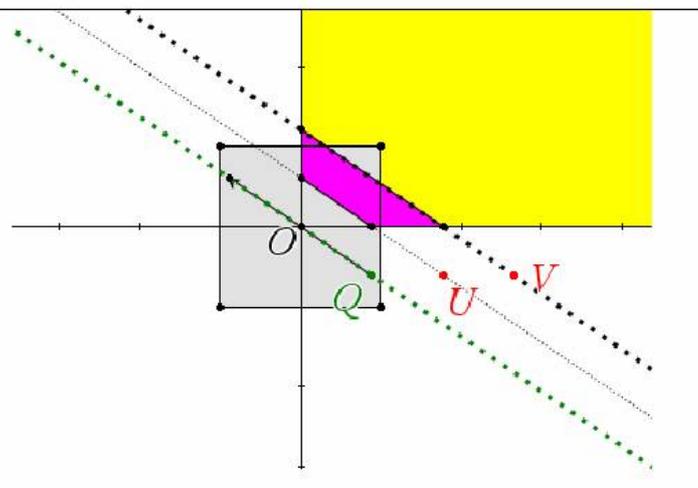
Le rectangle $]ks; (k+2)s[\times]kt; (k-2)t[$ ne contient aucun point de Ω .

14.c. L'ensemble des points P tels que $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 0$ est la droite (OQ) . De façon générale, les points P dont les coordonnées vérifient une relation de la forme $g(P) = \lambda$ (constante réelle) c'est-à-dire $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \lambda$ sont sur une droite parallèle à (OQ) .

- La droite d'équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 1$ est la parallèle à (OQ) qui passe par le point U de coordonnées $(2s; t)$.
- La droite d'équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 2$ est la parallèle à (OQ) qui passe par le point V de coordonnées $(3s; t)$.

Graphiquement, s'il y avait un point entre les deux droites (celle passant par U exclue, celle par V incluse) qui appartient à Ω , on pourrait en déduire par une translation $T_{k \cdot \overrightarrow{OQ}}$ convenable un point de Ω situé dans le trapèze colorié en magenta (petite base et côtés ouverts) donc dans le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$, ce qui est impossible.

Il n'y a pas dans Ω de point P tel que $1 < g(P) \leq 2$.



14.d. Soit $P(x; y)$ un point tel que $0 < |g(P)| \leq 2$. Supposons que P appartienne à Ω .

Sans diminuer la généralité, on peut supposer que $0 < g(P) \leq 2$, quitte à considérer le symétrique de P par rapport à O .

La question 14.c a montré qu'il n'est pas possible que $1 < g(P) \leq 2$.

Il n'est pas possible non plus que $g(P) = 1$, sinon l'homothétique P' de P par l'homothétie de centre O et de rapport 2 vérifierait $g(P') = 2$ et serait lui aussi dans Ω , ce qui est impossible.

Il reste à étudier le cas $0 < g(P) < 1$. Considérons alors l'homothétique P' de P par l'homothétie de centre O et de rapport l'entier k qui vérifie la double inégalité $\frac{1}{g(P)} < k \leq \frac{1}{g(P)} + 1$

$g(P') = \frac{kx}{s} - \frac{ky}{t} = k \cdot g(P)$. Utilisons l'inégalité que vérifie k :

$$\frac{1}{g(P)} \times g(P) < k \cdot g(P) = g(P') \leq \left(\frac{1}{g(P)} + 1\right) \times g(P) \text{ soit } 1 < g(P') \leq 1 + g(P) \leq 2.$$

Ce point P' serait dans la bande $1 < g(P') \leq 2$ et serait lui aussi dans Ω , ce qui est impossible.

Il n'y pas de point de Ω tel que $0 < |g(P)| \leq 2$.

Ainsi, tous les points P de Ω qui vérifient $|g(P)| \leq 2$ sont sur la droite d'équation $g(P) = 0$

Tout point P de Ω qui vérifie $|g(P)| \leq 2$ appartient à la droite (OQ) .

14.e. Si $\varepsilon \geq \frac{\min(\alpha, \beta)}{2}$, la question est réglée par ce qu'on vient de voir puisque le point Q lui-même convient.

Il reste le cas où $0 < \varepsilon < \frac{\min(\alpha, \beta)}{2}$. Dans ce cas, considérons le nombre $\varepsilon' = \min(\varepsilon, s, -t)$.

D'après la **question 14.a.** Il existe un point $P(x, y)$ qui est à la fois dans Ω et dans le rectangle $]0; \varepsilon'[\times]0; -\varepsilon'[($ (donc *a fortiori* dans le rectangle $]0; \varepsilon[\times]0; -\varepsilon[$).

Ce point P est tel que $0 < x < s$ et $t < y < 0$. Donc : $-1 < g(P) = \frac{x}{s} - \frac{y}{t} < 1$

D'après la **question 14.d.**, ce point appartient à la droite (OQ) .

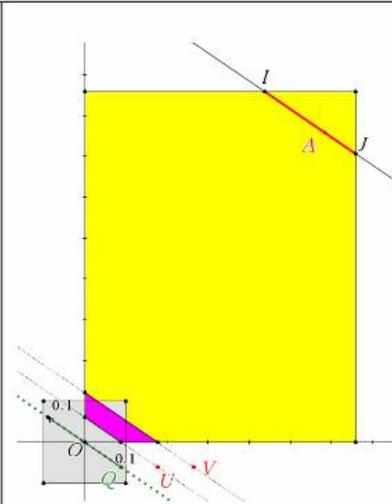
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point P qui est à la fois dans Ω , dans le rectangle $]0; \varepsilon[\times]0; -\varepsilon[$ et sur la droite (OQ) .

P étant un tel point, $\|\overline{OP}\| \leq \varepsilon\sqrt{2}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, par translations successives de vecteur \overline{OP} ou de son opposé, on peut construire un réseau de points de Ω régulièrement échelonnés sur la droite (OQ) et dont la distance à leur voisin est majorée par $\varepsilon\sqrt{2}$.

Considérons une parallèle à (OQ) passant par un point A intérieur au rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$. Alors cette droite a en commun avec ce rectangle un segment $]IJ[$.

Supposons que cette droite contienne un point de Ω . Choisissons $\varepsilon = \frac{IJ}{\sqrt{2}}$ et construisons sur cette droite à partir de ce point, par translations successives, le réseau de points de Ω décrit ci-dessus. Nous obtiendrons ainsi au moins un point de Ω situé à l'intérieur du segment $]IJ[$, donc situé dans le rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$. C'est impossible.

Une parallèle à (OQ) passant par un point A intérieur au rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$ ne contient aucun point de Ω .



15. L'ensemble \mathcal{H} est stable pour la soustraction et il n'est pas vide puisqu'il contient x . De ce fait, il contient $0 = x - x$ ainsi que $-x = 0 - x$. Il contient $2x = x - (-x)$ ainsi que $-2x = -x - x$. Par itération k fois du procédé, pour tout entier k positif, \mathcal{H} contient kx et son opposé $-kx$.

Pour tout entier relatif k , $kx \in \mathcal{H}$, autrement dit, l'ensemble \mathcal{H} contient $k\mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $y \in \mathcal{H}$. Il existe un entier relatif k tel que : $kx \leq y < (k+1)x$. (Cet entier est $\text{ent}\left(\frac{y}{x}\right)$).

Par stabilité pour la soustraction : $y - kx \in \mathcal{H}$. Mais cet élément vérifie : $0 \leq y - kx < x$.

Puisque \mathcal{H} ne contient aucun élément de $]0; x[$, nécessairement $y - kx = 0$. Il existe ainsi un entier relatif k tel que $y = kx$

Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $y \in k\mathbb{Z}$, autrement dit \mathcal{H} est contenu dans $k\mathbb{Z}$.

En définitive, $\mathcal{H} = k\mathbb{Z}$.

16.a. Considérons la parallèle à (OQ) passant par le point de coordonnées $(\lambda = \alpha - \frac{s}{t}\beta; 0)$.

Elle a pour équation : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{\lambda}{s}$, soit : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{\alpha}{s} - \frac{\beta}{t}$.

Cette droite passe par le point A de coordonnées $(\alpha; \beta)$ qui est le point de Ω dont le triplet associé est le triplet $(k = 1; m = n = 0)$.

<p>Il s'agit de la droite (AL) passant par le sommet A « Nord-Est » du rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$.</p> <p>Toute parallèle à (OQ) coupant l'axe Ox en un point U situé strictement entre O et L passe à l'intérieur du rectangle $]0; \alpha[\times]0; \beta[$ et a un segment commun avec lui. En vertu de la question 14.f, une telle droite ne contient aucun point de Ω.</p> <p>Aucune valeur u appartenant à $]0; \lambda[$ n'appartient à l'ensemble Λ.</p>	
--	--

16.b. Montrons que l'ensemble Λ est stable pour la soustraction.

<p>Soit x_1 et x_2 deux éléments de Λ. Les parallèles à (OQ) passant par les points $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$ ont pour équations respectives : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_1}{s}$ et $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_2}{s}$</p> <p>Elles passent chacune par un point de Ω, le point A_1 et le point A_2 respectivement.</p> <p>Le point A_3 translaté de A_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1O}$ appartient à Ω d'après la question 11. Or :</p> $\begin{cases} x_{A_3} = x_{A_2} - x_{A_1} \\ y_{A_3} = y_{A_2} - y_{A_1} \end{cases}$	
---	--

Les coordonnées de ce point A_3 vérifient : $\frac{x_{A_3}}{s} - \frac{y_{A_3}}{t} = \frac{x_{A_2} - x_{A_1}}{s} + \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{t} = \frac{x_2 - x_1}{s}$.

La parallèle à OQ passant par A_3 a pour équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_2 - x_1}{s}$ et coupe l'axe Ox au point d'abscisse : $x_3 = x_2 - x_1$. Il en résulte que, si x_1 et x_2 sont deux éléments de Λ , leur différence $x_3 = x_2 - x_1$ est aussi un élément de Λ .

Les deux hypothèses de la **question 15** sont satisfaites :

$$\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \text{ avec } \lambda = \alpha - \frac{s}{t}$$

17.a. Les points P de Ω tels que $f(P) = 0$ ont des coordonnées entières. Si nous considérons le point $Q(s; t)$ lui-même qui appartient à Ω , il existe trois entiers k, m, n tels que : $s = k\alpha + m; t = k\beta + n$

Or, ses coordonnées vérifient $0 < s < \min(\alpha, \beta) < 1$ et $-1 < -\min(\alpha, \beta) < t < 0$.

Les coordonnées de Q sont non entières donc $f(Q) = k \neq 0$.

Le point Q' symétrique de Q par rapport à O appartient à Ω et a des coordonnées opposées.

Compte tenu de l'unicité du triplet qui le caractérise, $f(Q') = -k = -f(Q)$.

L'un ou l'autre des deux points Q ou Q' a une image par f qui est un entier strictement positif.

L'ensemble Γ contient au moins un entier strictement positif.

L'ensemble des entiers > 0 appartenant à Γ étant non vide, cet ensemble a bien un plus petit élément.

17.b. Montrons que Γ est stable pour la soustraction.

Soit k et k' deux éléments de Γ et $P(k\alpha + m; k\beta + n)$ et $P'(k'\alpha + m'; k'\beta + n')$ des points de Ω situés sur la droite (OQ) qui leur sont associés. Le point P'' translaté de P' par la translation de vecteur \overrightarrow{PO} appartient à Ω d'après la question 11 et à la droite (OQ) car cette droite est globalement invariante par cette translation. Ses coordonnées sont $(k'\alpha + m' - (k\alpha + m); k'\beta + n' - (k\beta + n))$

Le triplet qui caractérise ce point est le triplet $(k' - k; m' - m; n' - n)$. Ainsi : $f(P'') = f(P') - f(P)$. Si k et k' deux éléments de Γ , leur différence $k' - k$ est aussi un élément de Γ .

Si γ est le plus petit entier > 0 appartenant à Γ , par définition l'intervalle $]0; \gamma[$ ne contient aucun élément de Γ . Les hypothèses de la question 15 sont satisfaites : $\Gamma = k\mathbb{Z}$.

17.c. Considérons un point P_1 appartenant à Ω et à la droite (OQ) tel que $f(P_1) = \gamma$.

Considérons un autre point P_2 appartenant à Ω et à la droite (OQ) tel que $f(P_2) = k_2\gamma$ qui n'est pas homothétique de P_1 par une homothétie de centre O et de rapport entier (il en existe puisqu'on peut trouver des points convenables arbitrairement voisins de O , notamment entre O et P_1).

Soit (γ, m_1, n_1) et $(k_2\gamma, m_2, n_2)$ leurs triplets associés.

Compte tenu de l'appartenance de ces points à la droite (OQ) :

$$\frac{\gamma\alpha + m_1}{s} = \frac{\gamma\beta + n_1}{t} \text{ et } \frac{k_2\gamma\alpha + m_2}{s} = \frac{k_2\gamma\beta + n_2}{t}$$

Puisque P_2 est choisi non homothétique de P_1 dans un rapport entier, $k_2m_1 - m_2$ et $k_2n_1 - n_2$

Nous pouvons en déduire :

$$\frac{s}{t} = \frac{\gamma\alpha + m_1}{\gamma\beta + n_1} = \frac{k_2\gamma\alpha + m_2}{k_2\gamma\beta + n_2} = \frac{k_2(\gamma\alpha + m_1)}{k_2(\gamma\beta + n_1)} - \frac{(k_2\gamma\alpha + m_2)}{(k_2\gamma\beta + n_2)} = \frac{k_2m_1 - m_2}{k_2n_1 - n_2}$$

Dans ce dernier rapport, tous les ingrédients sont des entiers, ce rapport est rationnel.

Le rapport $\frac{s}{t}$ ainsi que son opposé $-\frac{s}{t}$ sont des nombres rationnels.

18.a. Vu que $\frac{u}{v}$ est la forme irréductible de $-\frac{s}{t}$, une équation cartésienne d'une parallèle à (OQ) est l'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = c$ où c est une constante arbitraire.

Les entiers u et v étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs a et b tels que $au + bv = 1$

Supposons que $c = \frac{u}{v}$ et montrons que la droite d'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{u}{v}$ passe par un point de Ω . Une équation équivalente en est l'équation : $vx + uy = u^2$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(bu^2 ; au^2)$ qui est un point de Ω en tant que point à coordonnées entières. Ceci montre que $\frac{u}{v} \in \Lambda$ donc que $u \in W$.

Supposons que $c = \frac{v}{v} = 1$ et montrons que la droite d'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$ passe par un point de Ω . Une équation équivalente en est l'équation : $vx + uy = uv$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(buv ; auv)$ qui est un point de Ω en tant que point à coordonnées entières. Ceci montre que $1 = \frac{v}{v} \in \Lambda$ donc que $v \in W$.

Les entiers u et v appartiennent à W .

18.b. Dès lors que $\frac{u}{v}$ et $1 = \frac{v}{v}$ appartiennent à Λ , par stabilité de cet ensemble pour l'addition, les nombres $a\frac{u}{v}$ et $b\frac{v}{v}$ appartiennent à Λ , ainsi que leur somme $\frac{au+bv}{v} = \frac{1}{v}$.

L'entier 1 appartient à W et, avec lui, tous ses multiples entiers.

$$W = \mathbb{Z}$$

19. La **question 9** a montré le sens : Si α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs u et v vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$, alors P_Ω est vérifiée.

Réciproquement, la **question 5** a montré que P_Ω ne peut être vérifiée qu'avec deux irrationnels. Faisons une synthèse des **questions 11** et suivantes qui partent de l'hypothèse « P_Ω est vérifiée » :

Les parallèles à la droite (OQ) ont une équation de la forme : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = c$ soit, avec la notation $\frac{s}{t} = -\frac{u}{v}$ une équation de la forme : $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = c$

Puisque s et t sont de signes contraires, u et v sont de même signe, on peut sélectionner la paire d'entiers strictement positifs.

Celles qui passent par un point de Ω ont une équation de la forme : $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{1}{u} \times k\lambda$ avec $\lambda = \alpha + \frac{u}{v}\beta$.

La **question 18** a montré que $W = \mathbb{Z}$. Nécessairement, plus petit coefficient strictement positif $\frac{1}{v}$ est associé à celle qui coupe la demi-droite $[Ox)$ le plus près de l'origine (celle de la **question 16.a**).

Nous obtenons : $\frac{1}{u} \left(\alpha + \frac{u}{v}\beta \right) = \frac{1}{v}$ soit : $\alpha u + \beta v = 1$.

Réciproquement, si P_Ω est vérifiée, α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs u et v vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$.

20. Soit α et β deux réels strictement positifs. Nous avons vu en **question 3** que la condition $\max(\alpha, \beta) \geq 1$ était une condition suffisante pour que la propriété P_U soit vérifiée.

Supposons que $\max(\alpha, \beta) < 1$. Nous avons vu en **question 5** que si l'un au moins des deux nombres α ou β était rationnel, alors il n'est pas possible que la propriété P_U soit vérifiée. L'irrationalité des deux nombres est une condition nécessaire.

Dans un tel cas, les nombres α et $1 - \alpha$ sont deux irrationnels strictement positifs de somme 1. Ils satisfont les conditions du théorème A. Les ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(1 - \alpha)$ forment une partition de \mathbb{N}^* , ils sont complémentaires : $\mathcal{E}(\alpha) = \overline{\mathcal{E}(1 - \alpha)}$.

De la même façon, les ensembles $\mathcal{E}(\beta)$ et $\mathcal{E}(1 - \beta)$ sont complémentaires : $\mathcal{E}(\beta) = \overline{\mathcal{E}(1 - \beta)}$.

Or : $\overline{\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta)} = \overline{\mathcal{E}(\alpha)} \cap \overline{\mathcal{E}(\beta)} = \mathcal{E}(1 - \alpha) \cap \mathcal{E}(1 - \beta)$. Nous obtenons dans ces conditions :

$$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathcal{E}(1 - \alpha) \cap \mathcal{E}(1 - \beta) = \emptyset$$

Les réels α et β vérifient P_{\cup} si et seulement si les réels $1 - \alpha$ et $1 - \beta$ vérifient P_{\cap} .

En vertu du théorème démontré en **question 19**, la propriété P_{\cup} est vérifiée si et seulement si :

- Ou bien $\max(\alpha, \beta) \geq 1$
- Ou bien $\max(\alpha, \beta) < 1$ mais α et β sont deux irrationnels strictement positifs tels qu'il existe des entiers u et v strictement positifs vérifiant : $u(1 - \alpha) + v(1 - \beta) = 1$

21. Considérons trois nombres irrationnels a, b, c tels que $\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(c) = \emptyset$.

D'après le **théorème B**, il existe des entiers strictement positifs u, v, u' et v' tels que : $\begin{cases} au + bv = 1 \\ au' + cv' = 1 \end{cases}$

On en déduit la relation : $bvu' - cuv' = u' - u$.

Supposons qu'il existe des entiers strictement positifs x et y tels que $bx + cy = 1$.

Nous aurions à la fois : $\begin{cases} bv u' - cu v' = u' - u \\ bx + cy = 1 \end{cases}$

Or, $\det \begin{pmatrix} v u' & -u v' \\ x & y \end{pmatrix} = v u' y + u v' x > 0$.

Le système d'équations en b et c représenté par les deux relations simultanées aurait des solutions.

Il serait possible d'exprimer b et c en fonction de u, v, u', v', x et y : les nombres b et c seraient des rationnels.

Cette hypothèse est à rejeter. La réciproque du théorème B ne peut pas s'appliquer.

Si $\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(c) = \emptyset$, alors $\mathcal{E}(b) \cap \mathcal{E}(c) \neq \emptyset$.

On ne peut pas obtenir trois ensembles disjoints deux à deux.

<p>La copie d'écran TI-NSpire ci-contre illustre la situation des questions 19 et 20 avec deux réels irrationnels a et b et leurs deux compléments à l'unité.</p> <p>On fait afficher les 25 premiers termes des ensembles qui leur sont associés.</p> <p>On peut conjecturer que $\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \emptyset$ et que $\mathcal{E}(1 - a) \cup \mathcal{E}(1 - b) = \mathbb{N}^*$</p>	<pre> Define a=1/(1+sqrt(2)) Define b=1/(2+sqrt(2)) entr(a,25) {2,4,7,9,12,14,16,19,21,24,26,28,31,33,36,38,41,43,45,48,50,53,55,57,60} entr(b,25) {3,6,10,13,17,20,23,27,30,34,37,40,44,47,51,54,58,61,64,68,71,75,78,81,85} entr(1-a,25) {1,3,5,6,8,10,11,13,15,17,18,20,22,23,25,27,29,30,32,34,35,37,39,40,42} entr(1-b,25) {1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,21,22,24,25,26,28,29,31,32,33,35} a+2*b 1 </pre>	<pre> entr Define entr(x,n)= Prgm newList(n)→l For k,1,n iPart(k/x)→l[k] EndFor Disp l EndPrgm </pre>
--	--	---