Calculs de dérivées

Quelques conseils lorsqu'on calcule une dérivée

- Comme il est plus facile de dériver une somme qu'un quotient, on ne cherchera pas à réduire au même dénominateur avant de dériver.
- Comme le signe de la dérivée donne les variation de la fonction, on cherchera à factoriser la dérivée lorsque cela est possible.
- On peut être amener à utiliser plusieurs règles pour dériver une fonction.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes sur leur ensemble de dérivation.

- $f_1(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 10$ on utilise la linéarité de la dérivée

$$f_1'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 3$$

- $f_2(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-1}$ on ne réduit pas au même dénominateur !

$$f_2'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

- $f_3(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ on dérive comme un quotient et l'on factorise !

$$f_3'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

- $f_4(x) = (x^2 + x + 1)^3$ on dérive comme une puissance.

$$f_4'(x) = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$$

- $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ on dérive en utilisant les règles du quotient et de la racine.

$$f_5'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

La fonction f_5 est dérivable si $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ soit pour $x \in]-1\,;\,1[$

Étude et représentation d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction, on calcule la dérivée, on résout $f'(x) = 0$ puis on détermine le signe de la dérivée.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$
  a) Déterminer les variations de la fonction f.
  b) Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point $x = 1$.
  c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_1 ainsi que les tangentes horizontales, dans un repère d'unité 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

a) $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$.
f' s'annule en 0 et en 2 et son signe est celui du trinôme.
On dresse le tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

b) On calcule : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 3$.

$$T_1 \;:\; y = 3(x-1) + 4 \;\Leftrightarrow\; y = 3x + 1$$

c) On obtient la courbe suivante :

On peut montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point de symétrie en I.
Il faut montrer que :

$$f(1-x) + f(1+x) = 2f(1)$$

On peut montrer également que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution comprise entre 3 et 4.