Ex 1 : (*) - 4 pts

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;3]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-4x-2$$

1) Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$

$f'(x)=x^3+3x^2-4$

or $(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4$
$=x^3+3x^2-4$

donc $f'(x)=(x-1)(x+2)^2$

2) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2			1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-$	0	$+$	

3) En déduire le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$		2		-4,75		$+\infty$

4) Déterminer les *extrema* locaux de f
   - f admet un minimum local en $x=1$
     - ce minimum vaut $f(1)=-4{,}75$
   - C_f admet un point d'inflexion en $A(-2\,;2)$
     - rque : notion hors-programme en 1ère spécialité
     - on vérifie que la tangente à C_f en A « traverse » la courbe

- Voir le **graphique** en <u>fin de Corrigé</u>

Ex 2 : (**) - 3 pts

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$ pour $x\neq-1$

1) Calculer la dérivée et montrer que $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+2)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-x+2x-1-x^2+x-2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$ (cf COURS « 2nd degré »)

2) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f
on obtient le tableau de signes ci-dessous

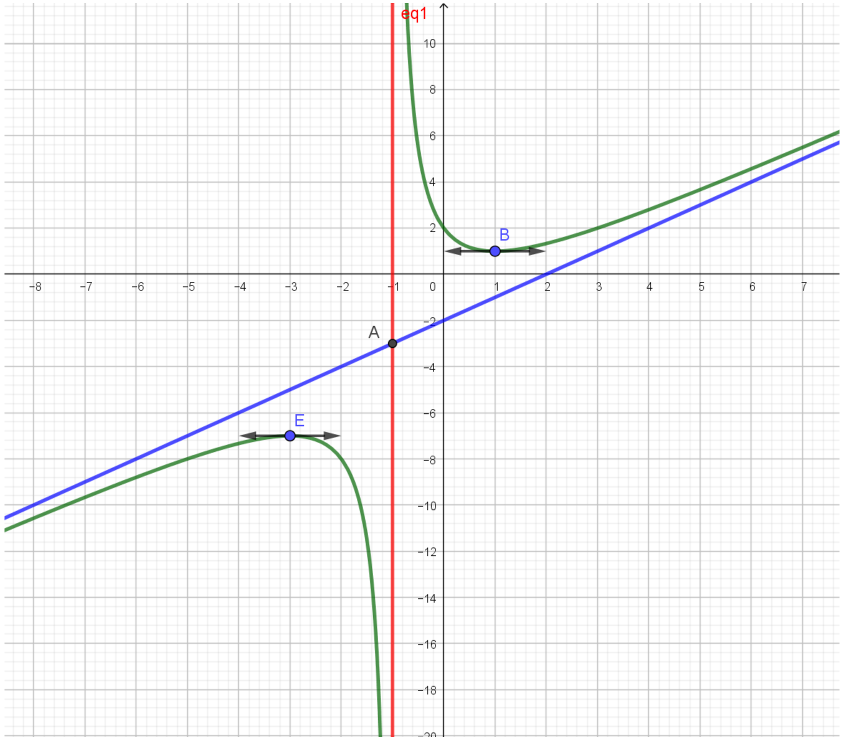
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$		-7		$-\infty$ ‖ $+\infty$		1		$+\infty$

3) Déterminer les éventuels *extrema* locaux de f
   - f admet un minimum local en $x=1$
     - ce minimum vaut $f(1)=1$
   - f admet un maximum local en $x=-3$
     - ce maximum vaut $f(-3)=-7$

4) Compléter le graphique donné en c-dessous



Ex 3 : **(**) - 5 pts**

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

f est définie si $x^2-9\geqslant 0$ donc avec un discriminant
$D_f=]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[$

2) Calculer la dérivée de f : $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$

3) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{x^2-9}$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	||				||	$+$	

4) En déduire le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||				||	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	0 ||				|| 0	↗	$+\infty$

5) Déterminer les *extrema* locaux de f

  ○ f n'admet aucun extremum local

- Voir le **graphique** en <u>fin de Corrigé</u>

Ex 4 : **(***) - 5 pts**

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f

f est définie si $x^2-4\geqslant 0$ et $x\neq 1$ donc avec un discriminant
$D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

2) Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x)=\dfrac{4-x}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}(x-1)-\sqrt{x^2-4}}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)-\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4}}$$

donc $f'(x)=\dfrac{x^2-x-(x^2-4)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{4-x}{(x-1)^2\sqrt{x^2-4}}$

3) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x^2-4}$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	||		||	$+$	0	$-$	

4) En déduire le tableau de variations de f

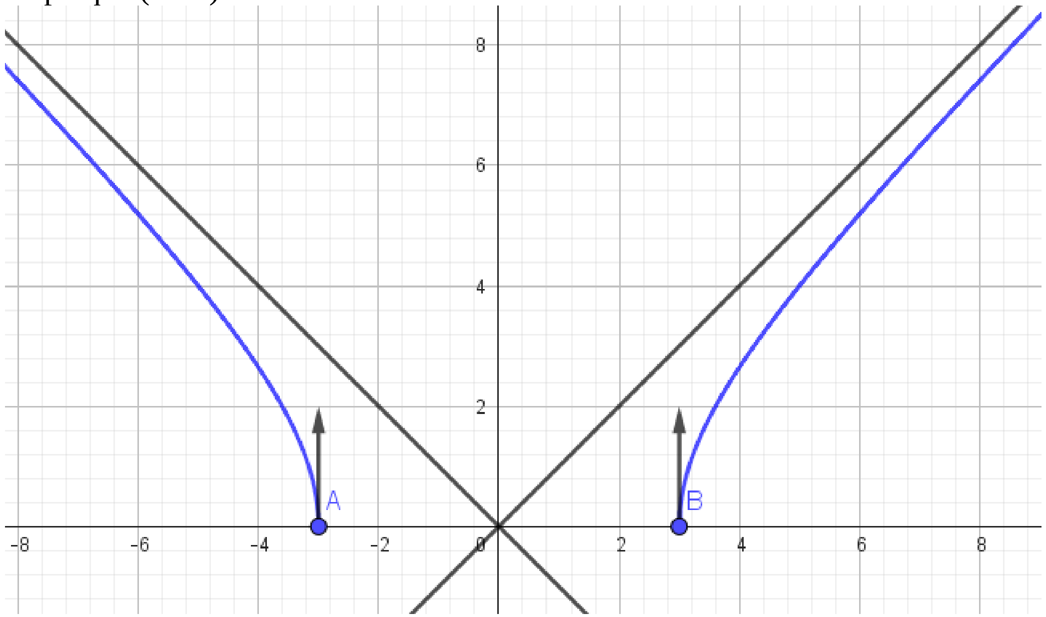
x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	0	$-$	
Variations de f	1	↗	0		0	↗	$f(4)$	↘	1

5) Déterminer les *extrema* locaux de f

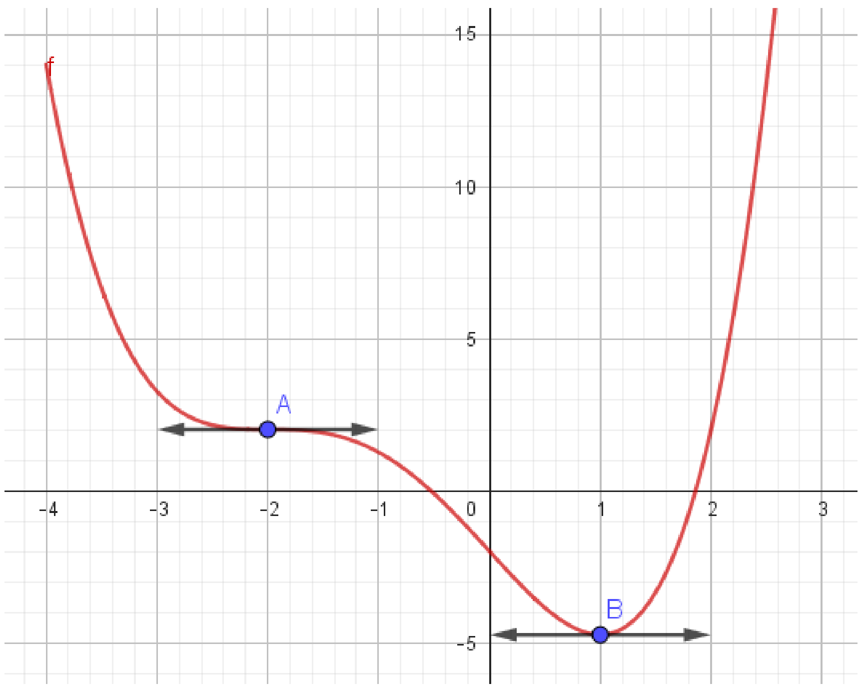
- f admet un maximum local en $x=4$
  - ce maximum vaut $f(4)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

- Voir le **graphique** en fin de Corrigé

Graphique (Ex 3) :



Graphique (Ex 1) :



Graphique (Ex 4) :