C.1

1. On a la relation :
$u_{14} = u_8 + 6\times r$
$u_{14} = 25 + 6\times 3$
$u_{14} = 25 + 18$
$u_{14} = 43$

2. On a la relation :
$u_8 = u_3 + 5\times r$
$25 = u_3 + 5\times 3$
$25 = u_3 + 15$
$u_3 = 25 - 15$
$u_3 = 10$

C.2

1.
- Le terme de rang 12 s'exprime par la relation :
$u_{12} = u_0 + 12\cdot r = 3 + 12\times(-2) = 3 - 24 = -21$
- Le terme de rang 43 s'exprime par la relation :
$u_{43} = u_0 + 43\cdot r = 3 + 43\times(-2) = 3 - 86 = -83$

2. a. On a la relation :
$u_n = -21$
Le terme de rang n s'exprime par :
$u_0 + n\cdot r = -21$
$3 + n\times(-2) = -21$
$-2\cdot n = -21 - 3$
$-2\cdot n = -24$
$n = \dfrac{-24}{-2}$
$n = 12$
Ainsi, c'est le terme de rang 12 qui a pour valeur -21.

b. On a la relation :
$u_n = -57$
Le terme de rang n s'exprime par :
$u_0 + n\cdot r = -57$
$3 + n\times(-2) = -57$
$-2\cdot n = -57 - 3$
$-2\cdot n = -60$
$n = \dfrac{-60}{-2}$
$n = 30$
Ainsi, c'est le terme de rang 30 qui a pour valeur -57.

C.3

- **1er méthode :**

La suite (u_n) étant une suite arithmétique, son terme de rang n admet pour expression :
$u_n = u_0 + r\cdot n$
où r est la raison de cette suite.

La connaissance des deux termes donnés dans l'énoncé permet d'obtenir le système d'équations :
$$\begin{cases} u_4 = u_0 + 4\times r \\ u_{22} = u_0 + 22\times r \end{cases}$$
qui devient : $\begin{cases} 12 = u_0 + 4\times r \\ -24 = u_0 + 22\times r \end{cases}$

Par soustraction de la première ligne par la seconde, on obtient l'équation :
$12 - (-24) = 4\times r - 22\times r$
$36 = -18\times r$
$r = \dfrac{36}{-18}$
$r = -2$
La raison de la suite vaut -2

La première équation permet d'obtenir le premier terme de la suite :
$u_4 = u_0 + 4\times r$
$12 = u_0 + 4\times(-2)$
$12 = u_0 - 8$
$u_0 = 12 + 8$
$u_0 = 20$
Le premier terme de la suite a pour valeur 20.

- **2nd méthode :**

La suite étant arithmétique, pour passer du rang 4 au rang 22, il faut ajouter 18 fois la raison :
$u_{22} = u_4 + 18\cdot r$
$-24 = 12 + 18\cdot r$
$18\cdot r = -24 - 12$
$18\cdot r = -36$
$r = \dfrac{-36}{18}$
$r = -2$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2. Ainsi, sa formule explicite est a pour forme :
$u_n = u_0 + (-2)\cdot n$
Appliquons cette formule pour le rang 4 :
$u_4 = u_0 - 2\times 4$
$12 = u_0 - 8$
$u_0 = 12 + 8$
$u_0 = 20$

Ainsi, la suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme 20 et de raison -2.

C.4 Pour passer du terme de rang 10 au terme de rang 16, il faut ajouter 6 fois la raison. Ainsi, on a l'égalité :
$u_{16} = u_{10} + 6\times r$
$14 = 5 + 6\times r$
$6\times r = 14 - 5$
$6\times r = 9$
$r = \dfrac{9}{6}$
$r = \dfrac{3}{2}$

La propriété des termes d'une suite arithmétiques permettent d'exprimer le terme de rang 10 en fonction de u_1 et de r :
$u_{10} = u_1 + (10-1)\cdot r$
$5 = u_1 + 9\times\dfrac{3}{2}$
$5 = u_1 + \dfrac{27}{2}$
$u_1 = 5 - \dfrac{27}{2}$
$u_1 = \dfrac{10}{2} - \dfrac{27}{2}$
$u_1 = -\dfrac{17}{2}$

Ainsi, la suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $-\dfrac{17}{2}$ et de raison $\dfrac{3}{2}$.

C.5 Considérons la suite (u_n) arithmétique de premier terme u_0. Notons r sa raison, on a les deux relations :

- $u_2 = u_0 + 2\cdot r$
- $u_6 = u_0 + 6\cdot r$

Les deux données de l'énoncé se traduisent par :

- $$\begin{aligned} u_2 &= 2{\cdot}u_0 \\ u_0+2{\cdot}r &= 2{\cdot}u_0 \\ 2{\cdot}r &= u_0 \\ r &= \frac{1}{2}{\cdot}u_0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} u_6 &= \big(u_2\big)^2 \\ u_0+6{\cdot}r &= \big(u_0+2{\cdot}r\big)^2 \\ u_0+6{\cdot}r &= {u_0}^2+4{\cdot}u_0{\cdot}r+4{\cdot}r^2 \end{aligned}$$

En substituant la valeur de r en fonction u_0 dans la seconde relation, on obtient :

$$\begin{aligned} u_0+6{\cdot}r &= {u_0}^2+4{\cdot}u_0{\cdot}r+4{\cdot}r^2 \\ u_0+3{\cdot}u_0 &= {u_0}^2+2{\cdot}{u_0}^2+{u_0}^2 \\ 4{\cdot}u_0 &= 4{\cdot}{u_0}^2 \\ 4{\cdot}\big(u_0-{u_0}^2\big) &= 0 \\ u_0-{u_0}^2 &= 0 \\ u_0{\cdot}\big(1-u_0\big) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- soit $u_0=0$, de la première relation, on a $r=0$. La suite $\big(u_n\big)$ est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 0.
- soit $u_0=1$, de la première relation, on a $r=\frac{1}{2}$. La suite $\big(u_n\big)$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

C.6 Pour qu'une suite soit arithmétique, il faut que la différence de deux termes consécutifs soit constante. Or, pour la suite $\big(u_n\big)$, la différence de termes consécutifs n'est pas constant :

$$u_1-u_0=5-2=3 \quad ; \quad u_2-u_1=9-5=4$$

La suite $\big(u_n\big)$ n'est pas une suite arithmétique.

C.7

1. Le terme de rang $n{+}1$ a pour expression :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2+3{\times}(n+1) = 2+3{\times}n+3{\times}1 \\ &= 2+3{\times}n+3 = 5+3{\times}n \end{aligned}$$
Étudions la différence de deux termes consécutifs de la suite $\big(u_n\big)$:
$$u_{n+1}-u_n = \big(5+3{\times}n\big)-\big(2+3{\times}n\big) = 3$$
2. La différence de deux termes consécutifs étant constants, on en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est une suite arithmétique de raison 3.
Le premier terme de la suite a pour valeur :
$$u_0 = 2+3{\times}0 = 2+0 = 2$$

C.8

- $u_0 = \dfrac{3}{8}$
- $u_1 = 2{\cdot}u_0 = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 = \dfrac{3}{2}$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 = 3$
- $u_4 = 2{\cdot}u_3 = 6$
- $u_5 = 2{\cdot}u_4 = 12$

C.9 $\big(v_n\big)$ est la suite géométrique de premier terme 54 et de raison $\frac{1}{3}$. Ses premiers termes ont pour valeur :

- $v_1 = 54$
- $v_2 = q{\times}v_1 = \dfrac{1}{3}{\times}54 = 18$
- $v_3 = q{\times}v_2 = \dfrac{1}{3}{\times}18 = 6$
- $v_4 = q{\times}v_3 = \dfrac{1}{3}{\times}6 = 2$

C.10 La suite $\big(v_n\big)$ étant géométrique de raison $\frac{3}{2}$, on a la relation :

$$\begin{aligned} v_6 &= v_3{\times}q^{6-3} \\ 12 &= v_3{\times}\Big(\frac{3}{2}\Big)^3 \\ v_3 &= \frac{12}{\Big(\frac{3}{2}\Big)^3} \\ v_3 &= \frac{12}{\frac{3^3}{2^3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_3 &= 12{\times}\frac{2^3}{3^3} \\ v_3 &= 2^2{\times}3{\times}\frac{2^3}{3^3} \\ v_3 &= \frac{2^5}{3^2} \end{aligned}$$

C.11 On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} w_6 &= w_3{\times}q^3 \\ -\frac{3}{64} &= \frac{3}{8}{\times}q^3 \\ q^3 &= \frac{-\frac{3}{64}}{\frac{3}{8}} \\ q^3 &= -\frac{3}{64}{\times}\frac{8}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q^3 &= -\frac{1}{8} \\ q^3 &= \Big(-\frac{1}{2}\Big)^3 \\ q &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La raison de cette suite est $-\frac{1}{2}$.

Ainsi, cette suite admet pour expression du rang n du terme :

$$\begin{aligned} w_n &= w_0{\times}q^n \\ w_n &= w_0{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n \end{aligned}$$

Pour $n{=}3$, on a l'expression :

$$\begin{aligned} w_3 &= w_0{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3 \\ \frac{3}{8} &= w_0{\times}\Big(-\frac{1}{8}\Big) \\ \frac{3}{8}{\times}\Big(-\frac{8}{1}\Big) &= w_0 \\ w_0 &= -3 \end{aligned}$$

Le premier terme de la suite a pour valeur -3.

C.12 Pour passer du terme de rang 4 au terme de rang 7, il faut multiplier par q^3. Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} v_7 &= v_4{\times}q^3 \\ \frac{3}{2} &= 96{\times}q^3 \\ q^3 &= \frac{\frac{3}{2}}{96} \\ q^3 &= \frac{3}{2}{\times}\frac{1}{96} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q^3 &= \frac{3}{2{\times}\big(3{\times}32\big)} \\ q^3 &= \frac{1}{64} \\ q^3 &= \frac{1}{4^3} \\ q^3 &= \Big(\frac{1}{4}\Big)^3 \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$

D'après la propriété des suites géométriques, on a l'expression de v_4 en fonction de v_0 et de q :

$$v_4 = v_1\times q^{4-1} \qquad 96 = v_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad 96 = v_1\times\frac{1}{64}$$
$$v_1 = 96\times 64 \qquad v_1 = 6\,144$$

Ainsi, la suite $\left(v_n\right)$ est la suite géométrique de premier terme $6\,144$ et de raison $\dfrac{1}{4}$.

C.13 Les sept termes ayant une progression géométrique, ils sont les premiers termes d'une suite géométrique $\left(u_n\right)$. Notons q la raison de cette suite géométrique.

Les conditions de l'énoncé se traduisent par :

- $$u_0+u_1+u_2 = 2$$
$$u_0+q{\cdot}u_0+q^2{\cdot}u_0 = 2$$
- $$u_4+u_5+u_6 = 1250$$
$$u_0{\cdot}q^4+u_0{\cdot}q^5+u_0{\cdot}q^6 = 1250$$
$$q^4{\cdot}\left(u_0+u_0{\cdot}q+u_0{\cdot}q^2\right) = 1250$$
$$u_0+u_0{\cdot}q+u_0{\cdot}q^2 = \frac{1250}{q^4}$$

On obtient l'égalité suivante :

$$2 = \frac{1250}{q^4}$$
$$2{\cdot}q^4 = 1250$$
$$q^4 = \frac{1250}{2}$$
$$q^4 = 625$$
$$q^4 = 5^4$$

Il existe deux valeurs possibles pour la raison q :

- Si $q{=}5$, on a :
$$u_0+q{\cdot}u_0+q^2{\cdot}u_0 = 2$$
$$u_0+5{\cdot}u_0+5^2{\cdot}u_0 = 2$$
$$31{\cdot}u_0 = 2$$
$$u_0 = \frac{2}{31}$$
Les termes recherchés sont les premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{31}$ et de raison 5.
- Si $q{=}-5$, on a :
$$u_0+q{\cdot}u_0+q^2{\cdot}u_0 = 2$$
$$u_0+(-5){\cdot}u_0+(-5)^2{\cdot}u_0 = 2$$
$$21{\cdot}u_0 = 2$$
$$u_0 = \frac{2}{21}$$
Les termes recherchés sont les premiers termes de la suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{21}$ et de raison -5.

C.14 Si $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique, elle admet une raison q vérifiant la relation :

$$u_{10} = u_6\times q^4$$

Ainsi, on a : $q^4 = \dfrac{u_{10}}{u_6} = \dfrac{\frac{9}{4}}{36} = \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{2^4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

Les deux nombres suivants $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont deux raisons donnant deux suites vérifiant les conditions de l'énoncé.

C.15

(a) On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par $\dfrac{1}{2}$. Cela permet de conjecturer que cette suite est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

(b) Notons $\left(u_n\right)$ cette suite de nombre. On a :
$$u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 9 \quad ; \quad u_3 = 18$$
Or, on a les relations suivantes :
$$u_2 = 3\times u_1 \quad ; \quad u_3 = 2\times u_2$$
On en déduit qu'il n'existe pas un seul facteur permettant de passer d'un terme au suivant : la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas une suite géométrique.

C.16

(a) Les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ ont pour valeur :
$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 7$$
Or, on a : $\dfrac{u_1}{u_0} = 4 \quad ; \quad \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{7}{4}$

Ainsi, on ne passe d'un terme à l'autre en multipliant par un même nombre : la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas une suite géométrique.

(b) On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_n = 5^n+5^{n+1} = 5^n+5\times 5^n = 5^n{\cdot}\left(1+5\right) = 6\times 5^n$$
L'expression des termes de la suite $\left(u_n\right)$ permettent de reconnaître la suite géométrique de premier terme 6 et de raison 5.

(c) On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_n = 2\times\frac{4^n}{3^{n+1}} = 2\times\frac{4^n}{3\times 3^n} = \frac{2}{3}\times\frac{4^n}{3^n} = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$$
L'expression des termes de la suite $\left(u_n\right)$ permettent de reconnaître la suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{3}$ et de raison $\dfrac{4}{3}$.

(d) Les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ sont :
$$u_0 = 0^0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1^1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 2^2 = 4$$
On remarque qu'on ne passe pas d'un terme à l'autre en multipliant par un même nombre : la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas une suite géométrique.

C.17

(1) On remarque que les premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ ont une différence constante :
$$u_1-u_0 = 4 \quad ; \quad u_2-u_1 = 4 \quad ; \quad u_3-u_2 = 4$$
Il est donc possible que la suite $\left(u_n\right)$ soit la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison 4.

(2) On remarque que les quotients de termes consécutifs restent constant :
$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{v_3}{v_2} = \frac{1}{9}$$
Il est possible que la suite $\left(v_n\right)$ soit la suite géométrique de premier terme 54 et de raison $\dfrac{1}{9}$.

(3) On a les rapports de termes consécutifs :
$$\frac{w_1}{w_0} = -3 \quad ; \quad \frac{w_2}{w_1} = -3 \quad ; \quad \frac{w_3}{w_2} = -3$$

La suite (w_n) a ses premiers termes correspondant à la suite géométrique de premier terme 2 et de raison -3.

4. Observons les résultats suivants :
- La différence de termes consécutifs n'est pas constante :
  $a_1 - a_0 = 1{,}75 \quad ; \quad a_3 - a_2 = 1{,}5$
- Le quotient de termes consécutifs n'est pas constant :
  $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{13}{20} \quad ; \quad \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{27}{20}$

La suite (a_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

5. Étudions la différence et le quotient de termes consécutifs :
- La suite (b_n) n'est pas une suite arithmétique :
  $b_1 - b_0 = 2 \quad ; \quad b_2 - b_1 = 4$
- On peut conjecturer que la suite (b_n) est une suite géométrique car :
  $\dfrac{b_1}{b_0} = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = 2$

On peut conjecturer que la suite (b_n) est géométrique et on peut affirmer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

C.18

1. Déterminons les premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 0^2 + 0 + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$
- $u_1 = 1^2 + 1 + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$
- $u_2 = 2^2 + 2 + 2 = 4 + 2 + 2 = 8$
- $u_3 = 3^2 + 3 + 2 = 9 + 3 + 2 = 14$

On remarque que les rapports de deux termes consécutifs de la suite ne sont pas égaux :
$\dfrac{u_2}{u_1} = 2 \quad ; \quad \dfrac{u_3}{u_2} = 2 \quad ; \quad \dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{7}{4}$

2. Déterminons les premiers termes de la suite (v_n) :
- $v_0 = \dfrac{1}{0^2+2} = \dfrac{1}{2}$
- $v_1 = \dfrac{1}{1^2+2} = \dfrac{1}{3}$
- $v_2 = \dfrac{1}{2^2+2} = \dfrac{1}{4+2} = \dfrac{1}{6}$
- $v_3 = \dfrac{1}{3^2+2} = \dfrac{1}{9+2} = \dfrac{1}{11}$

Déterminons la valeur des premières différences des termes consécutifs de la suite :
- $v_1 - v_0 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{6} - \dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{6}$
- $v_2 - v_1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{6}$
- $v_3 - v_2 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{6}{66} - \dfrac{11}{6} = -\dfrac{5}{66}$

On en déduit que la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

