Fonction exponentielle

I) Définition de la fonction exponentielle

1) Théorème 1:

• Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
Pour tout nombre x, $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$
• Cette fonction est appelée fonction exponentielle.
On la note exp.

Démonstration exigible:

• L'existence d'une telle fonction est admise.

• Démontrons l'unicité d'une telle fonction :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

▪ **Montrons d'abord que pour tout nombre réel x, $f(x) \neq 0$**

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = f(x) \times f(-x)$

$k'(x) = (f(x) \times f(-x))' = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$
(puisque ' = f)

Donc k est une fonction constante

Or $k(0) = f(0) \times f(0) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $k(x) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$

$f(x) \neq 0$ car s'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$ alors on aurait :

$f(a) \times f(-a) = 0$ ce qui est impossible puisque $f(a) \times f(-a) = 1$ donc $f(x) \neq 0$

▪ **Montrons maintenant l'unicité d'une telle fonction :**

Soit g une fonction différente de f telle que g soit aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g' = g$ et $g(0) = 1$

Soit $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. g ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = \dfrac{f'(x) \times g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \dfrac{f(x) \times g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$ puisque $f' = f$ et $g' = g$

Donc la fonction h est constante

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$

Ce qui prouve que f et g sont identiques. Ce qui prouve l'unicité de la fonction f.

2) Conséquences immédiates

• La fonction exponentielle $exp : x \longmapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(exp)' = exp$ et $exp(0) = 1$

• Pour tout nombre x, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$

Démonstration :

On sait que : $exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $(exp)' = exp$ et $exp(0) = 1$ par définition.

• Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \frac{1}{x}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = exp(x) \times exp(-x)$

$f'(x) = (exp(x) \times exp(-x))' = exp(x) \times exp(-x) - exp(x) \times exp(-x) = 0$

Donc f est une fonction constante

Or $f(0) = exp(0) \times exp(0) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(x) \times exp(-x) = 1$

Comme $exp(x) \neq 0$ (nous l'avons démontré précédemment)

alors en divisant par $exp(x)$ on obtient :

pour tout x de $\mathbb{R}$, $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$

II) Propriétés de la fonction exponentielle

1) Théorème 2:

Pour tous nombres réels a et b $exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)$

Démonstration :

Soit a un nombre réel et $h(x) = \frac{exp(a+x)}{exp(a)}$

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \frac{exp'(a+x)}{exp(a)} = \frac{exp(a+x)}{exp(a)} = h(x)$

de plus $h(0) = \frac{exp(a+0)}{exp(a)} = \frac{exp(a)}{exp(a)} = 1$

on a donc : $h' = h$ et $h(0) = 1$. Or d'après le théorème 1 il existe une unique fonction telle que $h' = h$ et $h(0) = 1$ qui est : $h(x) = exp(x)$

donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $\frac{exp(a+x)}{exp(a)} = exp(x)$

on obtient donc : $exp(a + x) = exp(a) \times exp(x)$

En particulier pour $x = b$: $exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)$

2) Théorème 3:

Pour tous nombres a et b réels $exp(a - b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$

Démonstration :

Pour tous nombres a et b réels,

$exp(a) = exp(a - b + b)$ et $exp(a - b + b) = exp(a - b) \times exp(b)$ en utilisant la propriété précédente.

On a donc : $exp(a - b) \times exp(b) = exp(a)$

Comme $exp(b) \neq 0$ alors on peut diviser par $exp(b)$

$exp(a - b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$

Théorème 4:

Pour tout nombre a réel et pour tout entier relatif n : $exp(na) = (exp(a))^n$

Démonstration :

• Démontrons tout d'abord cette égalité par récurrence dans le cas où n est un entier naturel :

Pour tout entier naturel n, notons P_n la proposition: $exp(na) = (exp(a))^n$

P_1 est vraie. En effet lorsque $n = 1$ on obtient : $exp(a) = (exp(a))^1$

Supposons que pour **un entier n quelconque fixé** on ait P_n vraie c'est-à-dire :

$exp(na) = (exp(a))^n$

alors $\exp((n+1)a) = exp(na + a) = exp(na) \times \exp(a) = (exp(a))^n \times \exp(a) = (exp(a))^{n+1}$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).

Donc pour tout entier naturel n: $exp(na) = (exp(a))^n$

• Démontrons maintenant cette égalité pour $n < 0$:

Posons $m = -n$ $(m > 0)$

$exp(na) = exp(-ma) = \frac{1}{exp(ma)} = \frac{1}{(exp(a))^m} = (exp(a))^{-m} = (exp(a))^n$

● Nous avons donc montré que pour tout entier relatif : $exp(na) = (exp(a))^n$

III) Nouvelle notation de la fonction exponentielle

On pose e = exp (1)

Une calculatrice indique e ≈ 2,718281828

Conséquences :

D'après le théorème 4, pour tout entier relatif n, $exp(n) = ((exp(1))^n$

On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels

On a donc :

Pour tout nombre x, $exp(x)$ = e^x

On le lit : « exponentielle de x » ou « e exposant x »

D'où les notations simplifiées :

● $e^0 = 1$ **et** $e^1 = e$

Pour tout nombre a et b:

● $e^{a+b} = e^a \times e^b$

● $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

● $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

Pour tout nombre x et pour tout entier relatif n,

● $(e^x)^n = e^{nx}$

IV fonction exponentielle

1) Variation de la fonction exponentielle

Théorème 5:

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$

Démonstration :

Pour tout nombre réel x, $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$

Donc $e^x \geq 0$

Comme $e^x \neq 0$ alors pour tout réel x, $e^x > 0$

Théorème 6:

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration:

Pour tout nombre réel x, $(e^x)' = e^x$

Or pour tout réel x, $e^x > 0$

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences importantes:

Pour tout nombres a et b :

- **$a < b$ équivaut à $e^a < e^b$**
- **$a = b$ équivaut à $e^a = e^b$**

Ces deux équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Elles sont surtout utilisées lors de la résolution d'équations et d'inéquations comme dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1: Résolvez l'équation suivante : $e^{3-x} = 1$

Cette équation équivaut à : $e^{3-x} = e^0$

qui est équivalente à l'équation : $3 - x = 0$

Donc $x = 3$

Cette équation a pour solution 3.

Exemple 2: Résolvez l'inéquation suivante : $e^{2x} < e^{x}$

Cette inéquation est équivalente à l'inéquation : $2x < x$

qui est équivalente à: $x < 0$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :]$-\infty$; 0]

Exemple 3: Résolvez l'équation suivante : $e^{2x} - 2e^{x} = -1$

Cette équation est équivalente à :

$(e^{x})^{2} - 2e^{x} + 1 = 0$

Posons $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{e^{x}}$ on obtient l'équation :

$X^{2} - 2X + 1 = 0$

$(X - 1)^{2} = 0$

Donc :

$X = 1$ On obtient donc :

$e^{x} = 1$ c'est-à-dire $e^{x} = e^{0}$

qui a pour solution : $\boldsymbol{x = 0}$

Cette équation a pour solution 0

2) Limites à l'infini de la fonction exponentielle

Théorème 7:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

Démonstration exigible:

• Tout d'abord démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en comparant les fonctions : $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto x$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x} - x$

$f'(x) = e^{x} - 1$

Pour $x \geq 0$ $e^{x} \geq e^{0}$ (car la fonction exponentielle est croissante)

soit $e^{x} \geq 1$ et donc $e^{x} - 1 \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante pour $x \geq 0$

Pour $x \leq 0$ $e^{x} \leq e^{0}$ (car la fonction exponentielle est croissante)

soit $e^{x} \leq 1$ et donc $e^{x} - 1 \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante pour $x \leq 0$

On obtient donc le tableau de variation de f ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

La fonction f admet 1 comme minimum

Par conséquent pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 1$ à fortiori, pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x) > 0$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x - x > 0$ soit **pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > x$**

Comme $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison: $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$

● Maintenant démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$

Or, $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} e^y = +\infty$ donc $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$. **Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$**

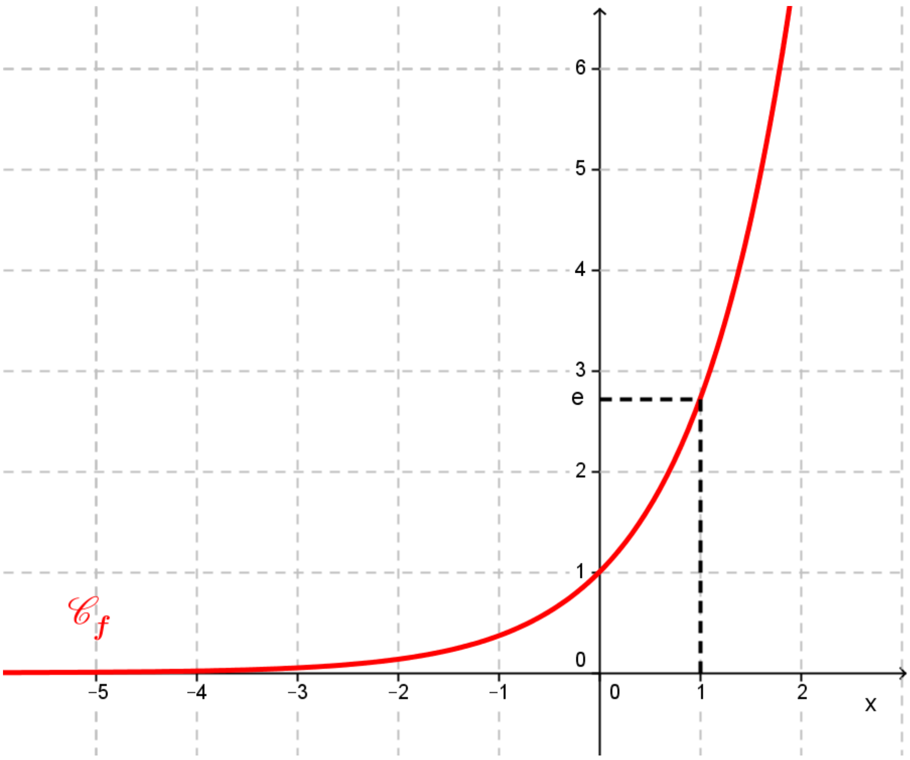
3) Tableau de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle

a) Tableau de variation :

Les résultats précédents nous permettent d'écrire:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$				$+$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

b) Courbe représentative de la fonction exponentielle



Remarque :

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ L'axe des abscisses est une asymptote horizontal à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

c) Limites importantes

Théorème 8:

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$

Démonstration :

• La fonction exponentielle est dérivable en 0 et exp'(0) = 1 et exp(0) = 1

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{exp(0 + x) - exp(0)}{x - 0}$$

C'est la limite lorsque x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et 0 + x on a donc :

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{exp(0 + x) - exp(0)}{x - 0} = exp'(0) = 1$$

On obtient donc : $\lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

● Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison, en comparant les fonctions : $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}$

Pour cela étudions la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = e^x - x$

Or, pour tout nombre x: $e^x > x$ (vu dans la démonstration du théorème 7)

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		$\nearrow$ 1 $\nearrow$	

Ainsi pour tout nombre x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$

Ce qui prouve que tout x strictement positif $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$, soit en divisant par x (qui est non nul puisque strictement positif)

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

Or, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème des comparaisons : $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

● Maintenant démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Pour cela, posons $y = -x$

Lorsque x tend vers $-\infty$ alors y tend vers $+\infty$

Ainsi, $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$ et donc: $xe^x = -\frac{y}{e^y}$

Or nous venons de démontrer que: $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ on obtient donc : $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$

A fortiori on a donc : $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} -\frac{y}{e^y} = 0$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

V) Etude de la fonction : $e^{u(x)}$

• Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}}$

• Comme la fonction exponentielle est strictement positive alors le signe de la dérivée dépend du signe de la fonction u'

• Comme la fonction exponentielle est strictement croissante alors d'après le théorème des fonctions composées le sens de variations de f est le même que celui de u.

• Pour tout x de I $\;e^{u(x)} > u(x)$

C'est une application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.

Exemples :

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x^2-5x+1}$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$u'(x) = 6x - 5$

$u'(x) = 0$ pour $x = \frac{5}{6}$ $\quad$ $u'(x) \geq 0$ pour $x \geq \frac{5}{6}$ et $u'(x) \leq 0$ pour $x \leq \frac{5}{6}$

$f'(x) = (6x - 5)\, e^{3x^2-5x+1}$

Comme e^{3x^2-5x+1} est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{13}{12}$	$\nearrow$	$+\infty$

Sachant que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ on obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{13}{12}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $u(x) = \frac{1}{x}$

Dans notre exemple $f(x) = e^{u(x)}$

Etudions les variations de u :

$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$u'(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$

Comme $e^{\frac{1}{x}}$ est strictement positive alors le signe de f' dépend de celui de u'

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Sachant que $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$, que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \mapsto 0} e^x = 1$, on obtient le tableau de variation de la fonction f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	1

Les courbes représentatives de fonctions u et f sont :