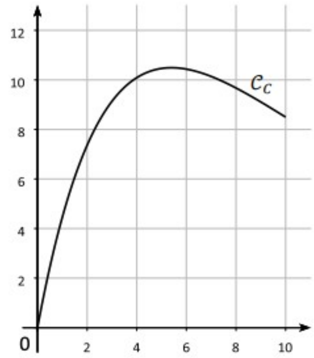
Exercice n°1



Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit.
Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire chaque jour x tonnes de ce produit est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $C(x)=(5x-2)e^{-0,2x}+2$

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_C$ de la fonction C dans un repère orthonormé

1. Par lecture graphique, donner une estimation de la quantité journalière de produit pour laquelle le coût total mensuel est maximal.

Le coût total mensuel est maximal lorsque $x \approx 5$ soit environ 5 tonnes par jour.

2. Le coût marginal C_m, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une unité de valeur supplémentaire, est assimilé à la dérivée de la fonction coût total.

a) Démontrer que le coût marginal C_m est défini sur l'intervalle $[0;10]$ par : $C_m(x)=(-x+5,4)e^{-0,2x}$;

On a $C_m(x)=C'(x)$ et C est de la forme $u \times v+k$ donc $C'=u' \times v+u \times v'+0$

$$C_m(x)=C'(x)=(5)e^{-0,2x}+(5x-2)(-0,2e^{-0,2x})=e^{-0,2x}(5-x+0,4)=(-x+5,4)e^{-0,2x}$$

b) Pour quelle quantité de produit fabriqué par jour le coût marginal est-il négatif ?

$C_m(x)<0$ donne $-x+5,4<0$ car $e^{-0,2x}>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc on obtient $x>5,4$

Le coût marginal est négatif entre 5,4 et 10 tonnes de produit fabriqué par jour.

c) Déterminer le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0;10]$.

x	0		5,4		10
Signe de C'		+	0	−	
Variations de C	0	↗	≈ 10,49	↘	≈ 8,5

d) Déterminer le coût total mensuel maximal sur l'intervalle considéré.
On donnera la valeur arrondie à l'euro près.

Le coût total mensuel maximal est atteint lorsque $x=5,4$ et il vaut

donc $C(5,4) \approx 10{,}490$ milliers d'euros soit environ $10\,490$ €.

Exercice n°2

On considère qu'en 2022, 3 300 000 personnes étaient atteintes de diabète en France.

Pour étudier l'évolution de la maladie, des chercheurs appliquent un modèle selon lequel le nombre de personnes atteintes augmente de 2 % par an.

On note u_n le nombre de personnes atteintes de diabète en France selon ce modèle durant l'année (2022 + n). On a donc $u_0 = 3300000$

1. Justifier que, selon ce modèle, le nombre de personnes atteintes de diabète en France sera de 3433320en 2024.

Augmenter de 2% revient à multiplier par $1{,}02$ en effet $x+2\%x = x+0{,}02x = 1{,}02x$.
En 2022, 3 300 000 étaient atteintes donc $1{,}02 \times 3300000$ en 2023 et $1{,}02 \times (1{,}02 \times 3300000)$ en 2023 soit 3 433 320.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

On a $u_{n+1} = 1{,}02 \times u_n$ (d'après la question 1.) donc (u_n) est une suite géométrique de raison $1{,}02$ et de premier terme $u_0 = 3300000$.

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

On sait que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 3300000 \times 1{,}02^n$.

4. En déduire le nombre de personnes qui, selon ce modèle, seront atteintes de diabète en France en 2028.

$2028 = 2022+6$ il s'agit donc de calculer u_6. donc $u_6 = 3300000 \times 1{,}02^6 = 3716335{,}984$
Soit environ 3 716 336 seront atteint en 2028.

5. On définit en langage Python la fonction suivante.

```
def seuil(S):
  u=3300000
  n=0
  while u<S:
    u=u*1.02
    n=n+1
  return n
```

Après exécution dans la console on obtient l'affichage suivant.

```
>>> seuil(5000000)
21
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Le nombre de personnes atteint par la maladie dépassera les 5 000 000 à partir de l'année 2022+21 = 2043.

Exercice n°3

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note :
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On note $\overline{S}$ et $\overline{M}$ les événements contraires des événements S et M.

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

On admet que : • Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95.

• Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,96.

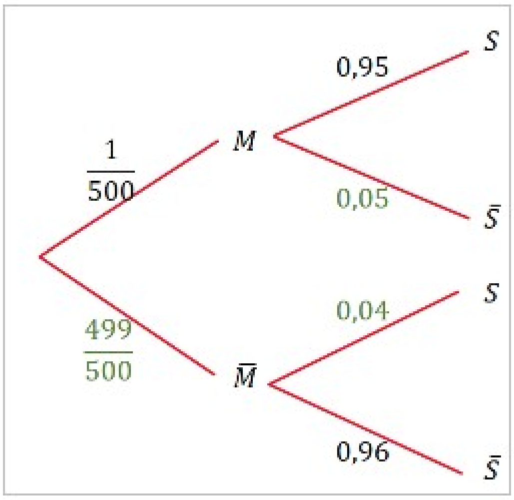
1. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique donc $P(M)=\frac{1}{500}$

Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,95 donc $P_M(S)=0{,}95$

Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est de 0,96 donc $P_{\overline{M}}(\overline{S})=0{,}96$

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, modélisant cette situation :



3. Montrer que $P(S)=0{,}04182$.

$$P(S)=P(M\cap S)+P(\overline{M}\cap S)=\frac{1}{500}\times 0{,}95+\frac{499}{500}\times 0{,}04=0{,}04182$$

4. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique en passant.
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

On nous demande $P_S(M)$

donc $P_S(M)=\frac{P(M\cap S)}{P(S)}=\frac{0{,}0019}{0{,}04182}\approx 0{,}045$

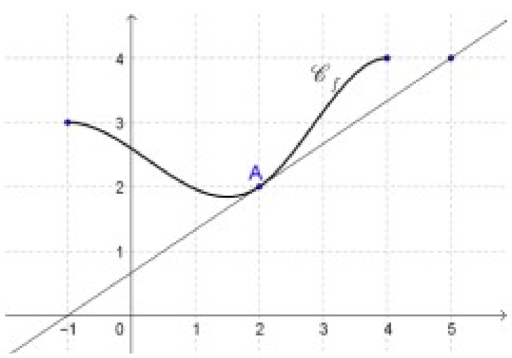
5. Les événements M et S sont-ils indépendants ? Justifier.

M et S sont indépendants si $P_S(M)=P(M)$ or $P_S(M)\approx 0{,}045$ et $P(M)=0{,}002$.

Donc M et S ne sont pas indépendants.

Exercice n°4 Ce QCM comprend 4 questions indépendantes.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-1;4]$.
On a tracé sur la figure ci-dessous la courbe $\mathcal{C}f$ et la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(2;2)$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A est :



Réponse a $y=\frac{2}{3}(x-2)+2$

Réponse b $y=2(x-2)+\frac{2}{3}$

Réponse c $y=\frac{2}{3}(x+2)+2$

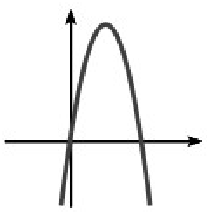
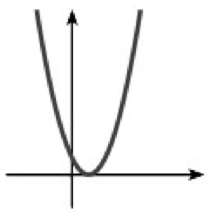
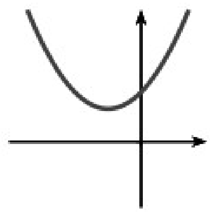
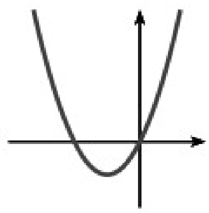
Réponse d $y=\frac{3}{2}(x-2)+2$

Le point $A(2;2)$ doit appartenir à la tangente ce qui n'est pas le cas de **b** et **c.**

Par lecture graphique le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{2}{3}$: ce n'est pas le cas de **d.**

C'est donc la réponse a.

2. On considère une fonction du second degré f définie sur R par : $f(x)=ax^2+bx$ où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.
   Quelle est la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé ?

Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
			

$f(0)=0$ donc la courbe passe par l'origine du repère ; ce n'est le cas de **b** et **c**.

$a>0$ donc ce n'est pas **a**.

C'est donc la réponse d.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé une droite $\mathcal{D}$ a pour équation : $x - 2y = 1$.

   Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

Réponse a	**Réponse b**	**Réponse c**	**Réponse d**
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.	Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.	Le point de coordonnées $A(1;-2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.	L'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$ est égale à 1.

Le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D de plus, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Par conséquent $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de D. **C'est donc la réponse b.**

4. La suite u est définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in N, u_{n+1}=0{,}5u_n+2$

Réponse a	**Réponse b**	**Réponse c**	**Réponse d**
La suite u est une suite géométrique.	La suite u est une suite arithmétique.	La suite u semble avoir pour limite $+\infty$.	La suite u semble avoir pour limite 4.

On obtient les résultats du tableur de la calculatrice

C'est donc la réponse d.

n	u			
0	3			
1	3.5			
2	3.75			
3	3.875			
4	3.9375			
5	3.9688			
6	3.9844			
7	3.9922			
8	3.9961			
9	3.998			
10	3.999			

n=0