C.1

(a) De la première équation, on déduit la valeur de l'inconnue x en fonction de l'inconnue y :

$$x - 3y = 8$$
$$x = 3y + 8$$

En substituant dans la seconde équation, l'inconnue x par son expression en fonction de y, on obtient :

$$\begin{aligned} 4x+y&=-7 \\ 4(3y+8)+y&=-7 \\ 12y+32+y&=-7 \\ 13y&=-7-32 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} 13y&=-39 \\ y&=\frac{-39}{13} \\ y&=-3 \end{aligned}$$

En utilisant la valeur de y dans l'expression de l'inconnue x, on a :

$$x = 3y+8 = 3\times(-3)+8 = -9+8 = -1$$

On en déduit que le couple $(-1\,;-3)$ est solution du système (S).

(b) Le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 10y = 20 \end{array}\right.$

est équivalent au système : (S) : $\left\{\begin{array}{l} 10x + 15y = 50 \\ 10x + 20y = 40 \end{array}\right.$

Par soustraction de la première équation par la seconde équation, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} 15y-20y&=50-40 \\ -5y&=10 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} y&=\frac{10}{-5} \\ y&=-2 \end{aligned}$$

En utilisant la valeur de y dans la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 2x+3y&=10 \\ 2x+3\times(-2)&=10 \\ 2x-6&=10 \\ 2x&=10+6 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} 2x&=16 \\ x&=\frac{16}{2} \\ x&=8 \end{aligned}$$

Ainsi, le système (S) admet le couple $(8\,;-2)$ pour solution.

C.2

On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - z &=& -2 \\ 3x + y + 2z &=& -1 \\ x - y + 3z &=& 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x + 6y - 3z &=& -6 \\ 3x + y + 2z &=& -1 \\ 3x - 3y + 9z &=& 9 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 5y-5z &=& -5 \\ 9y-12z &=& -15 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 45y-45z &=& -45 \\ 45y-60z &=& -75 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 45y-45z &=& -45 \\ 15z &=& 30 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 45y-45z &=& -45 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 45y-90 &=& -45 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y-3z &=& -6 \\ 45y &=& 45 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x + 6y - 3z &=& -6 \\ y &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x + 6 - 6 &=& -6 \\ y &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x &=& -6 \\ y &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 1 \\ z &=& 2 \end{array}\right.$$

C.3

(1) Par lecture de l'équation cartésienne, on obtient le vecteur $\overrightarrow{u}\,(-1\,;-3)$

(2) La droite (Δ) étant parallèle à la droite (d), le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ). Ainsi, la droite (Δ) admet une équation cartésienne de la forme :

$-3{\cdot}x + y + c = 0$ où $c\in\mathbb{R}$

Le point A appartenant à la droite (Δ), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la droite (Δ) :

$$\begin{aligned} -3{\cdot}x_A + y_A + c &= 0 \\ -3\times(-2)+2+c &= 0 \\ 6+2+c&=0 \\ c&=-8 \end{aligned}$$

La droite (Δ) admet pour équation cartésienne :

$-3{\cdot}x + y - 8 = 0$

(3) (a) Le vecteur $\overrightarrow{v}$ étant normal à la droite (d') et la droite (d') étant perpendiculaire à la droite (d), on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Ainsi, prenons le vecteur $-\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal à la droite (d') :

$\overrightarrow{v}\,(1\,;3)$

(b) La droite (d') admettant le vecteur $\overrightarrow{v}$ pour vecteur normal, on en déduit que la droite (d') admet une équation cartésienne de la forme :

$x + 3{\cdot}y + c = 0$ où $c\in\mathbb{R}$

Le point B appartenant à la droite (d'), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la droite (d') :

$$\begin{aligned} x_B + 3{\cdot}y_B + c &= 0 \\ 3+3\times(-1)+c&=0 \\ 3-3+c&=0 \\ c&=0 \end{aligned}$$

La droite (d') admet pour équation cartésienne :

$x + 3{\cdot}y = 0$

C.4

(1) (a) La droite (Δ) admettant le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2\,;-1)$, on en déduit qu'elle admet pour équation cartésienne :

$2{\cdot}x - y + c = 0 \quad c\in\mathbb{R}$

Le point A appartenant à la droite (Δ), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (Δ) :

$$\begin{aligned} 2{\cdot}x_A - y_A + c &= 0 \\ 2{\cdot}\Big(-\frac{1}{3}\Big) - 1 + c &= 0 \\ -\frac{2}{3} - 1 + c &= 0 \\ -\frac{5}{3} + c &= 0 \\ c &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

On en déduit une équation cartésienne de la droite (Δ) : $\quad 2{\cdot}x - y + \frac{5}{3} = 0$

(b) La droite (d) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{v}(3\,;4)$ et la droite (Δ) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{u}(2\,;-1)$.
Le déterminant de ces deux vecteurs a pour valeur :

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 2\times4-3\times(-1)=8+3=11$$

On en déduit que les deux vecteurs normaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires : les droites (d) et (Δ) ne sont pas parallèles.
Ainsi, les deux droites (d) et (d') sont sécantes.

(2) (a) Résolvons le système d'équations :

$$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 6x-3y=-51 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x+8y=10 \\ 6x-3y=-5 \end{cases}$$

Par soustraction des deux équations, on a :

$$\begin{aligned} 8y-(-3y) &= 10-(-5) \\ 8y+3y &= 10+5 \\ 11y &= 15 \\ y &= \frac{15}{11} \end{aligned}$$

En utilisant la première équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 3x+4y &= 5 \\ 3x+4\times\frac{15}{11} &= 5 \\ 3x+\frac{60}{11} &= 5 \\ 3x &= 5-\frac{60}{11} \\ 3x &= \frac{55}{11}-\frac{60}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{-5}{11} \\ x &= \frac{\frac{-5}{11}}{3} \\ x &= -\frac{5}{11}\times\frac{1}{3} \\ x &= -\frac{5}{33} \end{aligned}$$

Ce système d'équation admet pour solution le couple $\left(-\frac{5}{33}\,;\frac{15}{11}\right)$

(b) Le point d'intersection des droites (d) et (Δ) a ses coordonnées qui vérifient les équations cartésiennes de ces deux droites :

$$\begin{cases} 3x+4y-5=0 \\ 2x-y+\frac{5}{3}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+4y-5=0 \\ 6x-3y+5=0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on en déduit que les deux droites (d) et (Δ) s'interceptent au point :

$$M\left(-\frac{5}{33}\,;\frac{15}{11}\right)$$

C.5

(1)
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A) &= (3{,}5-(-1)\,;-2-1) \\ &= (3{,}5+1\,;-3)=(4{,}5\,;-3) \end{aligned}$$
- On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;4{,}5)$ est un vecteur normal à la droite (AB) :
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 4{,}5\times3+(-3)\times4{,}5=13{,}5-13{,}5=0$$
- La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
$$3\cdot x+4{,}5\cdot y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$$
Le point A appartenant à la droite (AB), ses coordonnées vérifient cette équation cartésienne :
$$\begin{aligned} 3\cdot x_A+4{,}5\cdot y_A+c &= 0 \\ 3\times(-1)+4{,}5\times1+c &= 0 \\ -3+4{,}5+c &= 0 \\ 1{,}5+c &= 0 \\ c &= -1{,}5 \end{aligned}$$

La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
$$3\cdot x+4{,}5\cdot y-1{,}5=0$$

(2)
- Montrons que le point H appartient à la droite (AB) :
$$\begin{aligned} 3\cdot x_H+4{,}5\cdot y_H-1{,}5 &= 3\times2+4{,}5\times(-1)-1{,}5 \\ &= 6-4{,}5-1{,}5=0 \end{aligned}$$
- Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MH}$:
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH}(x_H-x_M\,;y_H-y_M) &= (2-4\,;-1-2) \\ &= (-2\,;-3) \end{aligned}$$
- Montrons que la droite (MH) est perpendiculaire à la droite (AB). Pour cela, montrons que les deux vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB} &= 4{,}5\times(-2)+(-3)\times(-3) \\ &= -9+9=0 \end{aligned}$$

Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

C.6

(1) (a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A) &= (3-(-3)\,;5-2) \\ &= (3+3\,;3)=(6\,;3) \end{aligned}$$

(b) La hauteur (d) du triangle ABC issue du sommet C admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.
On en déduit qu'elle admet pour équation cartésienne :
$$6\cdot x+3\cdot y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}.$$
Le point C appartenant à la hauteur (d), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (d) :
$$\begin{aligned} 6\cdot x_C+3\cdot y_C+c &= 0 \\ 6\times2+3\times2+c &= 0 \\ 12+6+c &= 0 \\ 18+c &= 0 \\ c &= -18 \end{aligned}$$
La droite (d) admet pour équation cartésienne :
$$6\cdot x+3\cdot y-18=0$$

(c)
- Le vecteur $\overrightarrow{u}(-3\,;6)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car :
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} = -3\times6+6\times3=-18+18=0$$
- Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant normal à la droite (AB), on en déduit qu'elle admet l'équation cartésienne :
$$-3\cdot x+6\cdot y+c=0 \quad \text{où } c\in\mathbb{R}.$$
Le point A appartenant à la droite (AB), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de cette droite :
$$\begin{aligned} -3\cdot x_A+6\cdot x_B+c &= 0 \\ -3\times(-3)+6\times2+c &= 0 \\ 9+12+c &= 0 \\ 21+c &= 0 \\ c &= -21 \end{aligned}$$
La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
$$-3\cdot x+6\cdot y-21=0$$
- Le pied H de la hauteur (d) est le point d'intersection des droites (d) et (AB). Ses coordonnées sont les solutions du système d'équations :
$$\begin{cases} 6\cdot x+3\cdot y-18=0 \\ -3\cdot x+6\cdot y-21=0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 6\cdot x+3\cdot y-18=0 \\ -6\cdot x+12\cdot y-42=0 \end{cases}$$
Par addition membre à membre de ces deux équations :

$$3\cdot y+12\cdot y-18-42=0$$
$$15\cdot y-60=0$$
$$15\cdot y=60$$
$$y=\frac{60}{15}$$
$$y=4$$
En utilisant la première équation :
$$6\cdot x+3\cdot y-18=0$$
$$6\cdot x+3\times 4-18=0$$
$$6\cdot x+12-18=0$$
$$6\cdot x-6=0$$
$$6\cdot x=6$$
$$x=\frac{6}{6}$$
$$x=1$$
Le point H a pour coordonnées : $H(1\,;4)$

2 On a les longueurs :

- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
$=\sqrt{[3-(-3)]^2+(5-2)^2}=\sqrt{(3+3)^2+3^2}$
$=\sqrt{6^2+9}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$
- $CH=\sqrt{(x_H-x_C)^2+(y_H-y_C)^2}$
$=\sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}$
$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

On en déduit que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC :
$$\mathcal{A}=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{\sqrt{45}\times\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{45\times 5}}{2}=\frac{\sqrt{225}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{15^2}}{2}=\frac{15}{2}$$

C.7

1 a

- Le point K milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-1+0}{2}\,;\frac{2+(-5)}{2}\right)$
$=\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(0-(-1)\,;-5-2)$
$=(1\,;-7)$
- La médiatrice (d) du segment $[AB]$ admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal. Son équation cartésienne est de la forme :
$x-7\cdot y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$
Le point K appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :
$$x_K-7\cdot y_K+c=0$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)-7\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+c=0$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{21}{2}+c=0$$
$$\frac{20}{2}+c=0$$
$$10+c=0$$
$$c=-10$$
La médiatrice (d) a pour équation cartésienne :
$x-7\cdot y-10=0$

b

- Le point L milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées :
$L\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-1+3}{2}\,;\frac{2+4}{2}\right)$
$=\left(\frac{2}{2}\,;\frac{6}{2}\right)=(1\,;3)$
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A)=(3-(-1)\,;4-2)$
$=(4\,;2)$
- La médiatrice (d') du segment $[AC]$ admet le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal. La droite (d') admet pour équation cartésienne :
$4\cdot x+2\cdot y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$
Le point L appartenant à cette droite, ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :
$$4\cdot x_L+2\cdot y_L+c=0$$
$$4\times 1+2\times 3+c=0$$
$$4+6+c=0$$
$$10+c=0$$
$$c=-10$$
La droite (d') a pour équation cartésienne :
$4\cdot x+2\cdot y-10=0$

2 a Le centre du cercle circonscrit est sur le point de concours de la médiatrice. Les coordonnées de centre sont solutions du système :
$$\begin{cases} x-7\cdot y-10=0 \\ 4\cdot x+2\cdot y-10=0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 4\cdot x-28\cdot y-40=0 \\ 4\cdot x+2\cdot y-10=0 \end{cases}$$
Par différence de ces deux équations, on a :
$$-28\cdot y-2\cdot y-40-(-10)=0$$
$$-30\cdot y-40+10=0$$
$$-30\cdot y-30=0$$
$$-30\cdot y=30$$
$$y=\frac{30}{-30}$$
$$y=-1$$
En utilisant la première équation :
$$x-7\cdot y-10=0$$
$$x-7\times(-1)-10=0$$
$$x+7-10=0$$
$$x-3=0$$
$$x=3$$
Le centre du cercle circonscrit du triangle ABC a pour coordonnées $L(3\,;-1)$.

b Déterminons la distance LA :
$$LA=\sqrt{(x_A-x_L)^2+(y_A-y_L)^2}=\sqrt{(-1-3)^2+[2-(-1)]^2}$$
$$=\sqrt{(-4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$
Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre $L(3\,;-1)$ et pour rayon 5. On en déduit l'équation cartésienne vérifiée par les coordonnées de tous les points $M(x\,;y)$:
$$LM^2=5^2$$
$$(x-3)^2+[y-(-1)]^2=25$$
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=25$$
$$x^2+y^2-6x+2y-15=0$$

C.8

- En utilisant la formule du cours :

$$x^2+y^2+\big(-x_A-x_B\big)\cdot x+\big(-y_A-y_B\big)+\big(x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B\big)=0$$
$$x^2+y^2+\big[-(-2)-3\big]\cdot x+\big(-1-0\big)\cdot y+\big(-2\times 3+1\times 0\big)=0$$
$$x^2+y^2-x-y+\big(-6+0\big)=0$$
$$x^2+y^2-x-y-6=0$$

- En utilisant la caractérisation suivante du cercle. M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ si, et seulement si :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$
$$\big(x-x_A\big)\big(x-x_B\big)+\big(y-y_A\big)\big(y-y_B\big)=0$$
$$\big[x-(-2)\big]\big(x-3\big)+\big(y-1\big)\big(y-0\big)=0$$
$$\big(x+2)\big]\big(x-3\big)+\big(y-1\big)\cdot y=0$$
$$x^2-3\cdot x+2\cdot x-6+y^2-y=0$$
$$x^2+y^2-x-y-6=0$$

C.9

a) $$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{\big(-10\big)^2}{4}+\frac{2^2}{4}-22$$
$$=\frac{100}{4}+\frac{4}{4}-22=25+1-22=4$$

On en déduit que cette équation cartésienne définie un cercle.

Déterminons son centre et son rayon :

$$x^2+y^2-10\cdot x+2\cdot y+22=0$$
$$\big(x^2-10\cdot x\big)+\big(y^2+2\cdot y\big)+22=0$$
$$\Big[\big(x-5\big)^2-25\Big]+\Big[\big(y+1\big)^2-1\Big]+22=0$$
$$\big(x-5\big)^2+\big(y+1\big)^2+22-25-1=0$$
$$\big(x-5\big)^2+\big(y+1\big)^2=4$$

En notant $A(5\,;-1)$, on a :

$$\big(x-x_A\big)^2+\big(y-y_A\big)^2=2^2$$
$$AM^2=2^2$$
$$AM=2$$

Cette équation cartésienne définit le cercle de centre $A(5\,;-1)$ et de rayon 2.

b) $$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{(-2)^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-5$$
$$=\frac{4}{4}+\frac{16}{4}-5=1+4-5=0$$

On en déduit que cette équation cartésienne définie un unique point.

$$x^2+y^2-2\cdot x-4\cdot y+5=0$$
$$\big(x^2-2\cdot x\big)+\big(y^2-4\cdot y\big)+5=0$$
$$\Big[\big(x-1\big)^2-1\Big]+\Big[\big(y-2\big)^2-4\Big]+5=0$$
$$\big(x-1\big)^2+\big(y-2\big)^2+5-4-1=0$$
$$\big(x-1\big)^2+\big(y-2\big)^2=0$$

En notant $B(1\,;2)$, on a :

$$AM=0$$

Ainsi, les points M définis par cette équation cartésienne sont confondus avec le point B. Cette équation cartésienne ne définit qu'un point, le point $B(1\,;2)$

c) $$\frac{2^2}{4}+\frac{2^2}{4}-5=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}-5=1+1-5=-3$$

On en déduit que cette équation cartésienne définie l'ensemble vide.

C.10

1. a) La droite (d) possède pour vecteur directeur, le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnée $(1\,;2)$; elle admet ainsi pour vecteur normal $\overrightarrow{v}(-2\,;1)$; son équation cartésienne a alors la forme :

$$a\cdot x+b\cdot y+c=0$$
$$-2\cdot x+y+c=0$$

La droite (d) passe par le point $A(1\,;2)$.

Ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

$$-2\times 0-1+c=0$$
$$c=1$$

La droite (d) admet pour équation cartésienne :
$$-2\cdot x+y+1=0$$

b) Puisque $A(1\,;1)$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$, ce dernier admet une équation cartésienne de la forme :
$$x^2+y^2-2\times 1\times x-2\times 1\times y+c=0$$

On a la relation suivante définissant le rayon du cercle :
$$a^2+b^2-c=r^2$$
$$1+1-c=3^2$$
$$c=-7$$

Le cercle a pour équation cartésienne :
$$x^2+y^2-2\cdot x-2\cdot y-7=0$$

2. a) La première ligne de ce système représente l'équation cartésienne du cercle, ainsi, tout point $M(x\,;y)$ dont les coordonnées vérifient cette équation est un point du cercle.
De même, la seconde équation est l'équation cartésienne de la droite et tout point dont les coordonnées vérifient cette équation est un point de cette droite.
Les points dont les coordonnées vérifient ce système sont des points appartenant au cercle et à la droite : ce sont les points d'intersections de ces deux objets.

b) De la seconde ligne, on obtient la relation :
$$y=2x-1$$

Par substitution dans la première ligne, on obtient :
$$x^2+y^2-2\cdot x-2\cdot y-7=0$$
$$x^2+(2\cdot x-1)^2-2\cdot x-2\cdot(2\cdot x-1)-7=0$$
$$x^2+(4\cdot x^2-4\cdot x+1)-2\cdot x-(4\cdot x-2)-7=0$$
$$5\cdot x^2-10\cdot x-4=0$$

Cette équation polynomiale du second degré admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times 5\times(-4)=180>0$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{180}=6\cdot\sqrt{5}$

Cette équation admet pour solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-6\cdot\sqrt{5}}{10}=\frac{10}{10}-\frac{6\cdot\sqrt{5}}{10}=1-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+6\cdot\sqrt{5}}{10}=\frac{10}{10}+\frac{6\cdot\sqrt{5}}{10}=1+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}$$

En utilisant la relation entre x et y, on obtient :

$$y_1 = 2\cdot x_1 - 1 = 1 - \frac{6}{5}\cdot\sqrt{5} \qquad y_2 = 2\cdot x_2 - 1 = 1 + \frac{6}{5}\cdot\sqrt{5}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est formé des deux couples suivants :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(1-\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}\,;1-\frac{6}{5}\cdot\sqrt{5}\right)\,;\,\left(1+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}\,;1+\frac{6}{5}\cdot\sqrt{5}\right)\right\}$$