C.1

a) $\mathrm{e}^{5x+1} = \mathrm{e}^{2x}$

De la propriété $\left(\mathrm{e}^a{=}\mathrm{e}^b \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 5x+1 &= 2x \\ 5x-2x &= -1 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

b) $\mathrm{e}^{3x+1} = 1$

$\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^0$

De la propriété $\left(\mathrm{e}^a{=}\mathrm{e}^b \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 0 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{1-3x}}{\mathrm{e}} = 1$

$\mathrm{e}^{1-3x} = \mathrm{e}$

$\mathrm{e}^{1-3x} = \mathrm{e}^1$

De la propriété $\left(\mathrm{e}^a{=}\mathrm{e}^b \implies a{=}b\right)$:

$$\begin{aligned} 1-3x &= 1 \\ -3x &= 1-1 \\ -3x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-3} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$\mathcal{S} = \{0\}$

C.2

a) On a :

$\mathrm{e}^x < 1$

$\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$x < 0$

Cette inéquation a pour solution : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;0\right[$

b) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; on en déduit que l'inéquation $\mathrm{e}^{-x}>0$ admet pour ensemble des solutions :

$\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

c) On a :

$\mathrm{e}^{-x} > 1$

$\mathrm{e}^{-x} > \mathrm{e}^0$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$-x > 0$

$x < 0$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;0\right[$

d) On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}-1 &\geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{2x} &\geqslant 1 \\ \mathrm{e}^{2x} &\geqslant \mathrm{e}^0 \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$\begin{aligned} 2x &\geqslant 0 \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$

C.3

a) Étudions l'inéquation :

$\mathrm{e}^{2x-4} \geqslant 1$

$\mathrm{e}^{2x-4} \geqslant \mathrm{e}^0$

De la propriété : $\left(\mathrm{e}^a{\geqslant}\mathrm{e}^b \implies a{\geqslant}b\right)$

$$\begin{aligned} 2x-4 &\geqslant 0 \\ 2x &\geqslant 4 \\ x &\geqslant \frac{4}{2} \\ x &\geqslant 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left[2\,;+\infty\right[$

b) $\mathrm{e}^{2x-1} < \mathrm{e}^x$

La fonction exponentielle est strictement positive :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^x} &< \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \\ \mathrm{e}^{2x-1-x} &< 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} &< \mathrm{e}^0 \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$\begin{aligned} x-1 &< 0 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;1\right[$

C.4

a)

- Étudions l'inéquation :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}+3{\cdot}\mathrm{e}^x &< 4 \\ \mathrm{e}^{2x}+3{\cdot}\mathrm{e}^x-4 &< 0 \\ \left(\mathrm{e}^x\right)^2+3{\cdot}\mathrm{e}^x-4 &< 0 \end{aligned}$$

- Étudions le polynôme $x^2{+}3x{-}4$ qui a pour discriminant :

  $\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 3^2-4{\times}1{\times}(-4) = 9+16 = 25$

  On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

  Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3-5}{2{\times}1} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3+5}{2{\times}1} = \frac{2}{2} = 1$$

  On en déduit la factorisation :

  $x^2+3x-4 = \left(x+4\right)\left(x-1\right)$

- On en déduit la factorisation :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x}+3{\cdot}\mathrm{e}^x &< 4 \\ \left(\mathrm{e}^x\right)^2+3{\cdot}\mathrm{e}^x-4 &< 0 \\ \left(\mathrm{e}^x+4\right)\left(\mathrm{e}^x-1\right) &< 0 \end{aligned}$$

- Résolvons les deux équations :
  - $e^x + 4 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant -4$
    On en déduit : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
  - $e^x - 1 \geqslant 0 \Longrightarrow e^x \geqslant 1$
    On en déduit : $\mathcal{S} = \big[0\,;+\infty\big[$
- On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$e^x + 4$	$+$		$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$e^{2x} + 3e^x - 4$	$-$	0	$+$

On en déduit les solutions de notre inéquation :
$\mathcal{S} = \big]-\infty\,;0\big[$

b
$$e^x + e^{-x} < 2$$
$$e^x - 2 + e^{-x} < 0$$
La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$
$$e^x\cdot\big(e^x - 2 + e^{-x}\big) < e^x\cdot 0$$
$$e^{2x} - 2\cdot e^x + e^{-x+x} < e^x\cdot 0$$
$$e^{2x} - 2\cdot e^x + 1 < 0$$
$$\big(e^x\big)^2 - 2\cdot e^x + 1 < 0$$
$$\big(e^x - 1\big)^2 < 0$$
Or, le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif : $\mathcal{S} = \varnothing$

C.5

1 On peut conjecturer :
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.

2 Pour étudier la position relative de ces deux courbes, étudions le signe de la différence :
$f(x) - g(x) = x\cdot e^{-x} - x^2\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}\cdot\big(1-x\big)$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on obtient le tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
x	$+$		$+$
$1-x$	$+$	0	$-$
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$

Ce tableau de signes confirme la conjecture de la question 1.

C.6

a $f'(x) = e^x$

b L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = e^{a\cdot x+b}$
où la fonction u est définie par :
$a = 2 \quad ; \quad b = 0$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$f'(x) = a\cdot e^{a\cdot x+b} = 2\cdot e^{2\cdot x}$

c L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = e^{a\cdot x+b}$
où la fonction u est définie par :
$a = -1 \quad ; \quad b = 3$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$f'(x) = a\cdot e^{a\cdot x+b} = -1\cdot e^{3-x} = -e^{3-x}$

C.7

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour la fonction f' pour dérivée dont l'expression est :
$f'(x) = 2\cdot e^x + 2\cdot x$

2 La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour la fonction g' pour dérivée dont l'expression est :
$g'(x) = \dfrac{1}{4}\cdot\big(3\cdot e^{3x+1}\big) + (-2)\cdot e^{-2x} = \dfrac{3}{4}\cdot e^{3x+1} - 2\cdot e^{-2x}$

C.8

1 La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$
Résolvons l'inéquation :

$f'(x) > 0$	$e^{-x} < e^0$
$1 - e^{-x} > 0$	$-x < 0$
$-e^{-x} > -1$	$x > 0$
$e^{-x} < 1$	

On en déduit le tableau de signe de la fonction f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit :
- Sur $\big]-\infty\,;0\big[$, la fonction f est strictement décroissante.
- Sur $\big]0\,;+\infty\big[$, la fonction f est strictement décroissante.

2 La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$$g'(x) = 6 + 3\times(-2)\cdot e^{-2x} = 6 - 6\cdot e^{-2x}$$
Résolvons l'inéquation :

$g'(x) > 0$	$e^{-2x} < e^0$
$-6\cdot e^{-2x} > -6$	$-2x < 0$
$e^{-2x} < \dfrac{-6}{-6}$	$x > \dfrac{0}{-2}$
$e^{-2x} < 1$	$x > 0$

On en déduit le tableau de signe de la fonction g' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

On en déduit :
- Sur $\big]-\infty\,;0\big[$, la fonction g est strictement décroissante.
- Sur $\big]0\,;+\infty\big[$, la fonction g est strictement décroissante.

C.9

a L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$= 1\cdot\mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x = \big(1+x\big)\cdot\mathrm{e}^x$

(b) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = 1-2\cdot x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = -2 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = -2\cdot\mathrm{e}^x + \big(1-2\cdot x\big)\cdot\mathrm{e}^x$

$= \big(1-2\cdot x-2\big)\cdot\mathrm{e}^x = \big(-1-2\cdot x\big)\cdot\mathrm{e}^x = -\big(1+2\cdot x\big)\cdot\mathrm{e}^x$

C.10

(1) La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :

$u(x) = x+3 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :

$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$= 1\cdot\big(-\mathrm{e}^{-x}\big) + \big(x+3\big)\cdot\mathrm{e}^{-x} = \big[-1+\big(x+3\big)\big]\cdot\mathrm{e}^{-x}$

$= \big(x+2\big)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

(2) L'expression de la fonction g est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{2\cdot x-1}$

qui admettent pour dérivées :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot\mathrm{e}^{2\cdot x-1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{2\cdot x-1} + x\cdot\big(2\cdot\mathrm{e}^{2\cdot x-1}\big)$

$= \mathrm{e}^{2\cdot x-1} + 2x\cdot\mathrm{e}^{2\cdot x-1} = \big(2x+1\big)\cdot\mathrm{e}^{2\cdot x-1}$

C.11

(1) La fonction h est définie par le produit des fonctions u et v où :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x+1}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^{x+1}$

La formule de dérivation d'un produit l'expression de la fonction h' :

$h'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{x+1} + x\cdot\mathrm{e}^{x+1}$

$= (x+1)\cdot\mathrm{e}^{x+1}$

(2) La fonction j est définie par le produit $u\cdot v$ où :

$u(x) = x^2+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = 3\cdot\mathrm{e}^{3x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction h :

$j'(x) = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$= 2x\cdot\mathrm{e}^{3x+1} + \big(x^2+1\big)\cdot 3\cdot\mathrm{e}^{3x+1}$

$= \big(2x+3x^2+3\big)\cdot\mathrm{e}^{3x+1} = \big(3x^2+2x+3\big)\cdot\mathrm{e}^{3x+1}$

C.12

(1) La fonction f est définie comme l'inverse de la fonction u définie par :

$u(x) = 1-\mathrm{e}^x \quad ; \quad u(x) = -\mathrm{e}^x$

La formule de dérivation de l'inverse permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{-\mathrm{e}^x}{\big(1-\mathrm{e}^x\big)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{\big(1-\mathrm{e}^x\big)^2}$$

(2) La fonction g est définie par le quotient des fonctions u et v où :

$u(x) = \mathrm{e}^{x+1} \quad ; \quad v(x) = 2x+1$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = \mathrm{e}^{x+1} \quad ; \quad v'(x) = 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'écrire :

$$g'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\mathrm{e}^{x+1}\cdot(2x+1) - \mathrm{e}^{x+1}\times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{x+1}\cdot(2x+1-2)}{(2x+1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{x+1}\cdot(2x-1)}{(2x+1)^2}$$

C.13

(1) La fonction h est définie par le quotient des fonctions u et v où :

$u(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'écrire l'expression de la fonction k' dérivée de la fonction h :

$$h'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\big(2\mathrm{e}^{-2x}\big)\cdot\mathrm{e}^x - \big(1-\mathrm{e}^{-2x}\big)\cdot\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2}$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^{-2x+x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x+x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}}$$

$$= \frac{3\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

(2) La fonction j est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :

$u(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v(x) = 1+\mathrm{e}^{2x}$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir :

$$j'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{\big(2\cdot\mathrm{e}^{-2x}\big)\cdot\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big) - \big(1-\mathrm{e}^{-2x}\big)\cdot\big(2\cdot\mathrm{e}^{2x}\big)}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$

$$= \frac{2\cdot\big(\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x-2x} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x+2x}\big)}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^0}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2} = 2\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2}{\big(1+\mathrm{e}^{2x}\big)^2}$$