FONCTION EXPONENTIELLE : exercices

Exercice 1 – Unicité de la fonction exponentielle

Le cours indique qu'il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Le but de cet exercice est de démontrer que cette fonction (définie comme la fonction exponentielle) est ***unique*** *(l'existence est admise).*

On suppose donc qu'il existe une deuxième fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $g(0) = 1$ et $g' = g$, et on pose la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$; déterminer sa fonction dérivée.
3. En déduire l'expression de $\varphi(x)$ pour tout réel x.
4. Que peut-on en conclure pour les fonctions f et g ?

Exercice 2 –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^x$.

1. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^x$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 –

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

Exercice 4 –

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Calculer $h'(x)$ et en déduire les variations de h.
3. Tracer l'allure de la courbe de la fonction h.

Exercice 5 –

Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x + 1$.

Exercice 6 –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.