Ex 1 : Calculer les limites suivantes

Correction :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^2-3x+5} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)\, e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x - e^x = 0 - 0 = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = 1$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + 1}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} = 0$

Ex 2 : Déterminer les fonctions dérivées

$f(x) = e^{2x^2+x-3}$; $g(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$; $h(x) = \frac{3e^x}{e^{2x}+1}$

Correction :

1) $f_1' : x \mapsto (4x+1)\, e^{2x^2+x-3}$

2) $f_2' : x \mapsto \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \exp\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

3) $f_3' : x \mapsto \frac{3\,e^x(e^{2x}+1) - 3\,e^x(2\,e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{3\,e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}$

Ex 3 : Résoudre dans R les équations suivantes

$e^{4-x} = e^2$; $e^{x+1} \times e^{3x+2} = 1$; $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; $(e^x - e^{3x+1})\left(e^{\frac{1}{x}} - e^3\right) = 0$

Correction :

1) $e^{4-x} = e^2 \iff 4 - x = 2 \iff x = 2,$

2) $e^{x+1} \times e^{3x+2} = 1 \iff e^{x+1+3x+2} = 1 = \exp(0) \iff e^{4x+3} = e^0 \iff 4x+3 = 0 \iff x = -\frac{3}{4},$

3) Ici on fait un changement de variable et on pose $X = e^x$.
L'équation devient alors $X^2 + X - 2 = 0$. Puisque $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$, l'équation algébrique a deux solutions $X_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$.
Si on veut revenir à notre variable de départ, on doit résoudre deux équations exponentielles :

$$e^x = X_1 = 1 \quad \text{et} \quad e^x = X_1 = -2$$

La première a pour solution $x = 0$. Par contre, la deuxième n'a pas de solution, puisque l'exponentielle est toujours positive.
Donc l'unique solution de l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ est $x = 0$.

4) $(e^x - e^{3x+1})(e^{\frac{1}{x}} - e^3) = 0 \iff e^x - e^{3x+1} = 0$ ou $(e^{\frac{1}{x}} - e^3) = 0$.
La première équation nous donne $x = -\frac{1}{2}$, la deuxième a pour solution $x = \frac{1}{3}$.

Ex 4 : Résoudre dans R les inéquations suivantes :

$e^{2x} - 1 > 0$; $\frac{e^x+3}{e^x+1} > 2$; $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$; $e^{2x+5} < e^{1-x}$

Correction :

1) $e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff e^{2x} > e^0 \iff x \geq 0$
Donc $\mathcal{S} = [0; +\infty[$.

2) $\frac{e^x+3}{e^x+1} > 2 \iff e^x + 3 > 2(e^x+1) \iff e^x < 1 \iff x \leq 0$
Donc $\mathcal{S} =]-\infty; 0[$.

3) D'après la troisième équation de l'exercice précédent l'équation $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ a comme unique solution $x = 0$. De plus on peut écrire

$$e^{2x} + e^x - 2 = (e^x - 1)(e^x + 2)$$

D'où

$$e^{2x} + e^x - 2 > 0 \iff (e^x - 1)(e^x + 2) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff x \geq 0$$

Donc $\mathcal{S} = [0; +\infty[$

4) $e^{2x+5} < e^{1-x} \iff 2x + 5 < 1 - x \iff x < -\frac{4}{3}$

Donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[$.

Ex 5 : On considère la fonction $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Calculer la dérivée de *f* et en déduire les variations
2. Calculer les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$
3. En déduire l'existence de 2 droites asymptotes à Cf

Correction :

1) Pour tout réel x, on a

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x - \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^{-x}}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)} = x - \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

2) Pour tout réel x, on a

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{2}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

3) La fonction f est la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)\,e^x}{(e^x + 1)^2} = 1 - \frac{2\,e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 2\,e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

De plus, on peut écrire

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{(e^x(1 + e^{-x}))^2} = \frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{e^{2x}(1 + e^{-x})^2} = \frac{1 + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

4) On remarque que $f'(x) > 0$ pour tout réel x, donc le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

car

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to --\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\infty + 1 = -\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -+\infty} x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -\infty - 1 = -\infty$$

5) D'après l'expression de f obtenue à la question **2)**, on obtient

$$f(x) - (x - 1) = \frac{2}{e^x + 1}$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x - 1$.

Ex 6 : L'objectif est l'étude de la fonction $f(x) = x(e^{-x} + 1)$

Partie 1 : *Étude d'une fonction auxiliaire g*

Soit $g : x \mapsto e^{-x}(1 - x) + 1$.

1) Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.

2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie 2 : *Étude de la fonction f*

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit (d) la droite d'équation $y = x$. Démontrer que (d) est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et donner la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).

3) Déterminer f'.

4) À l'aide de la partie 1, déterminer le tableau de variations de f.

5) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}_f$ dont la tangente T_1 à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'asymptote (d).

7) Tracer (d), T_0, T_1 et $\mathcal{C}_f$.

Correction : Partie 1 : *Étude d'une fonction auxiliaire g*

1) Pour tout réel x , on a $g'(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$. Le tableau de variations de la fonction g est le suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$1 - e^{-2}$	↗ 1

avec $g(2) = 1 - e^{-2}$,

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x}(1 - x) + 1 = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}(1 - x) + 1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 = 1$$

2) D'après le tableau de variations, on peut facilement en déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2 : *Étude de la fonction f*

1) **a)** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x(e^{-x} + 1) = \lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = -\infty$

car $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\mathrm{e}^{-x}+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$.

2) On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x(\mathrm{e}^{-x}+1) - x = \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0^+$$

Donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d) en $+\infty$.

3) Pour tout réel x , on a

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}+1 - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x) + 1 = g(x)$$

4) D'après le signe de la fonction g, on en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = g(0) = 2$, donc la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = 2x$.

6) On rappelle que deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur.
Soit $A(a; f(a))$. L'équation de la droite T_1 tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc, pour que la droite T_1 soit parallèle à (d), il faut que son coefficient directeur soit égal à 1, c'est-à-dire il faut que $f'(a) = 1$. Or

$$f'(a) = \mathrm{e}^{-a}(1-a) + 1 = 1 \iff \mathrm{e}^{-a}(1-a) = 0 \iff a = 1$$

Puisque $f(1) = \mathrm{e}^{-1}+1 = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, le point A a pour coordonnées $A\left(1, 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

7) On a les courbes suivantes :