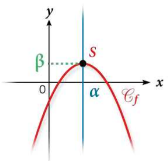
- Un trinôme du second degré peut s'écrire sous deux formes :
  - **forme développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
  - **forme canonique** : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels.
  - **forme factorisée éventuelle :** $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_1 sont les racines éventuelles.

- Somme et produit des racines :
  Si f admet deux réels x_1 et x_2 pour racines, alors :
  - La **somme** des racines est : $\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$
  - Le **produit** des racines est : $\boldsymbol{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$

- Représentation graphique ; variations

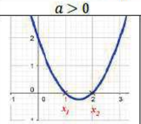
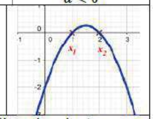
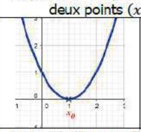
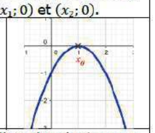
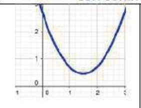
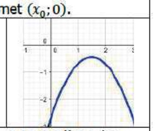


La courbe représentant f est une **parabole** de sommet $S(\alpha\,;\beta)$.
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut. On en déduit les variations de f.
Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas. On en déduit les variations de f.
La parabole est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

- Équation du second degré

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) correspondent aux racines de f.

Méthode :
- Toujours essayer de repérer une factorisation (par un facteur commun ou une identité remarquable).
- Repérer une racine « évidente », puis calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
- Dans le cas où on ne remarque rien de particulier, on calcule le discriminant.

Signe de $\Delta = b^2 - 4ac$	Racines de f	Forme factorisée de f	Signe de $f(x)$	Courbe représentative de f : $a > 0$	Courbe représentative de f : $a < 0$
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a 0 Signe de $-a$ 0 Signe de a	 La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$.	
$\Delta = 0$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$a(x-x_0)^2$	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a 0 Signe de a	 La parabole coupe l'axe des abscisses en son sommet $(x_0;0)$.	
$\Delta < 0$	aucune	Ne se factorise pas	x : $-\infty$ $+\infty$ Signe de $f(x)$: Signe de a	 La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.	

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

On admet que pour tout réel x on a :

$f(x) = -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25$ et pour tout réel x on a : $f(x) = -(x+4)(x-1)$.

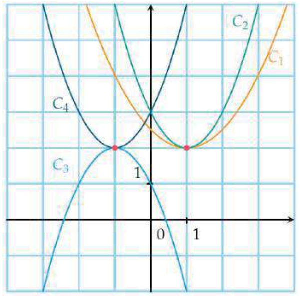
En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, répondre aux questions suivantes :

1) Résoudre $f(x) = 0$.
2) Résoudre $f(x) = 6{,}25$.
3) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2

Associer les courbes C_1, C_2, C_3 et C_4 des fonctions du second degré suivantes à leur forme canonique en justifiant.

1) $f_1(x) = (x-1)^2 + 2$
2) $f_2(x) = -(x+1)^2 + 2$
3) $f_3(x) = (x+1)^2 + 2$
4) $f_4(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$



Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$
c) $9x^2 - 18x + 9 = 0$
d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 4

Déterminer, lorsque cela est possible, une expression factorisée des trinômes de degré 2 suivants :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
b) $g(x) = 3x^2 - x + 7$
c) $h(x) = -8x^2 + 40x - 50$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 + x - 2 > 0$
b) $-3x^2 + x - 2 \leqslant 0$
c) $2x^2 + 3x \geqslant 0$
d) $2x^2 - 8 < 0$

Problème 1

Une entreprise produit de la pâte à papier.

On note q la masse de pâte produite, exprimée en tonnes, avec $q \in [0; 60]$.

Le coût de production, en euros, pour une quantité produite q est

$C(q) = q^2 + 632q + 1075$.

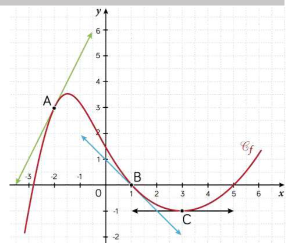
L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte.

a) Déterminer le prix de vente à la tonne.

b) En déduire l'expression du bénéfice en fonction de q.

c) Dans quel intervalle doit se situer la production pour que l'activité soit rentable ?

Dérivation : rappels de cours



➢ <u>Nombre dérivé et tangente</u> :

Par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (si cette limite est un réel)
$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a.
On retiendra en particulier « **dérivée nulle : tangente horizontale** ».
Dans l'exemple ci-contre, $f'(3) = 0$, $f'(1) = -1$ et $f'(-2) = 2$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

➢ <u>Dérivées des fonctions usuelles</u>

Fonction usuelle	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$, où k est un nombre réel fixé	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	]-∞ ; 0[∪]0; +∞ [	]-∞ ; 0[et]0; +∞ [	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	[0 ; + ∞ [	] 0 ; + ∞ [	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

➢ <u>Dérivées et opérations</u>

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$ alors :

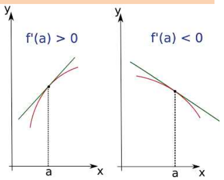
- La fonction $ku: x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et $(ku)' = \boldsymbol{ku'}$.
- La fonction $u + v: x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$.
- La fonction $uv: x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$.

Soit u et v des fonctions dérivables sur I, v ne s'annulant pas sur I, alors :

- La fonction $\frac{1}{v}: x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- La fonction $\frac{u}{v}: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est elle aussi dérivable sur I et on a la formule suivante: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Soit m et p deux réels. Soit g une fonction dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $mx + p \in I$. La fonction $f: x \mapsto g(mx + p)$ est définie et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $\boldsymbol{f'(x) = m\,g'(mx + p)}$

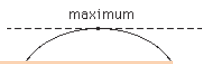
➢ <u>Signe de la dérivée et variations</u>



1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Pour déterminer les variations d'une fonction f :

- On calcule la dérivée $f'(x)$;
- On étudie le signe de $f'(x)$;
- On dresse le tableau de variations de f.

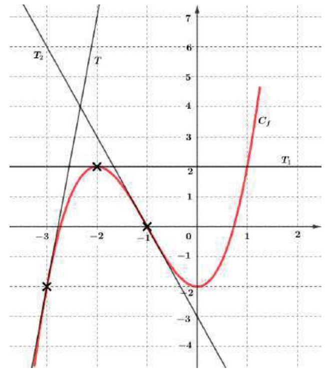


➢ <u>Extrema d'une fonction</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si a est un réel de l'intervalle I mais qui n'est pas une borne de I et si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet localement un extremum en a qui est $f(a)$: on parle d'extremum local.

Exercices : dérivation

Exercice 1



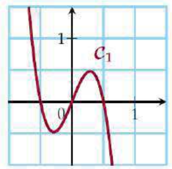
Sur le graphique ci-dessous, $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur $[-3{,}25; 1{,}25]$.
T est sa tangente au point d'abscisse -3 et T_1 sa tangente au point d'abscisse -2 et T_2 sa tangente au point d'abscisse -1.

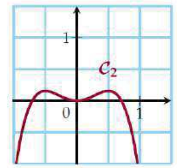
1) Lire les valeurs de :
a. $f'(-3)$ et $f(-3)$.
b. $f'(-2)$ et $f(-2)$.
c. $f'(-1)$ et $f(-1)$.
2) Donner les équations de T ; T_1 et T_2.
3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?

Exercice 2

Déterminer, en détaillant vos calculs, la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.
1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 3$
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3(x + 2)$
3) Soit h la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{1}{x^4}$
4) Soit l la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $i(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Exercice 3





Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.
Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$
1) Déterminer $f'(x)$.
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de f.
4) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 5

Dans chaque cas, déterminer les variations de la fonction f définie par :
1) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ pour $x \in]0; +\infty[$.
2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
3) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Problème 2

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 2$.
Soit h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.
1) Déterminer $h'(x)$.
2) Étudier le signe de $h'(x)$.
3) En déduire le tableau de variations de h.
En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ sur $[0; +\infty[$.

Suites : rappels de cours

- <u>Deux modes de génération d'une suite</u> :
  - Formule explicite $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ avec n entier naturel.
    exemple : $u_n = n^2 - 3n$ alors $u_7 = 7^2 - 3 \times 7 = 28$
  - Par récurrence $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = a} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)} \textbf{ pour tout } \boldsymbol{n \geqslant 0} \end{cases}$
    exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ pour tout } n \geqslant 0 \end{cases}$ alors $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$ $u_2 = 11\ldots$

- <u>Sens de variation d'une suite</u> :

La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang k lorsque pour tout $n \geqslant k$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante (ou décroissante) à partir de son 1er terme.
Pour montrer qu'une suite est monotone, **on calcule $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$** puis on étudie son signe.

- <u>Suites arithmétiques</u> :

$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ r est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$ exemple : $u_n = 50 + 3n$ suite arithmétique de raison 3 et de terme initial 50

$\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$ dans le cas où le premier terme de la suite est u_1

exemple : soit une suite arithmétique de raison 5 telle que $u_1 = 20$. Alors $u_{10} = u_1 + 9r = 65$.

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique = $\boxed{\dfrac{(\text{nombre de termes}) \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}}$

En particulier, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- <u>Suites géométriques</u> :

$\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$ q est la raison

$\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$ exemple : $u_n = 4 \times 1{,}5^n$ suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial 4

$\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$ dans le cas où le premier terme est u_1

Pour montrer qu'une suite est géométrique, **on calcule $\boldsymbol{u_{n+1}}$** et on montre que $u_{n+1} = q \times u_n$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i = \boxed{\text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$

En particulier, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

- <u>Comportement à l'infini : suite convergente, suite divergente</u>

(u_n) **converge vers $\boldsymbol{\ell}$** lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de ℓ lorsque n devient très grand.
(u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas (soit elle n'a pas de limite, soit elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercices : suite

Exercice 1
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Calculer u_5.

Exercice 2
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = (n+5)^2 + 2$.
1) Calculer les trois premiers termes de la suite.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3) Établir le sens de variation de la suite (u_n) en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 4
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + 1 \end{cases}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 16$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_6.

Exercice 6
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^2 + 4n$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 7
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 4n + 7$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Exercice 8
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.
1) Calculer la raison de cette suite.
2) Quel est le sens de variation de cette suite ?
3) Calculer u_{50}.

Exercice 9
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.
1) Exprimer u_n en fonction de n.
2) Calculer u_3.

Exercice 10
Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.

Exercice 11
Les premiers termes d'une suite sont : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 3$.
Cette suite peut-elle être géométrique ?

Exercice 12
Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 480$ et de raison $\frac{1}{2}$.
1) Calculer v_2, v_3 et v_4.
2) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de v_n en fonction de n.
3) Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

Problème 3
Un commercial très compétent, arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Il a commencé son travail en décembre 2015, avec 20 ventes réussies.
Soit la suite (v_n) telle que v_n représente le nombre de Smartphones vendus le mois n de l'année 2016.
On définit $v_0 = 20$.
1) Calculer v_1, v_2 et v_3.
2) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier correctement votre réponse.
3) Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.
4) A partir de quel mois vend-il plus de 200 Smartphones par mois ?

Problème 4
Un propriétaire propose à partir du 1er janvier 2015 un appartement dont le montant annuel initial du loyer est 4 500 €. Ce propriétaire augmente le loyer annuel chaque année de 3%.
On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année (2015+n) ; on a donc Q_0 = 4 500.
a) Calculer Q_1 et Q_2.
b) Donner la nature de la suite (Q_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
c) Exprimer Q_n en fonction de n.
d) En quelle année le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ? (à l'aide de la calculatrice).

Fonction exponentielle rappels de cours

➢ <u>Définition</u>

L'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**. On la note **exp :** $\boldsymbol{x \mapsto \exp(x)}$

$\boldsymbol{\exp(1) = e}$. Une valeur approchée de ce nombre est **2,718.**

Pour tous les nombres réels x on note $\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$**.**

➢ <u>Propriétés algébriques</u>

Pour tous les réels x et y et pour tout entier relatif n :

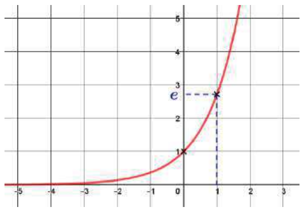
$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\boldsymbol{e^x > 0}$ $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$ $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$ $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Pour tous les réels a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{e^a}$.

➢ <u>Étude de la fonction exponentielle</u>

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de **exp**		1	e	↗



➢ <u>Équations et inéquations</u>

Pour tous réels x et y :

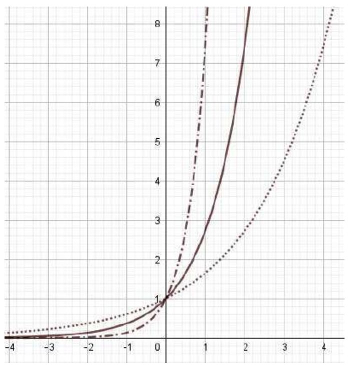
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ en particulier $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$ en particulier $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

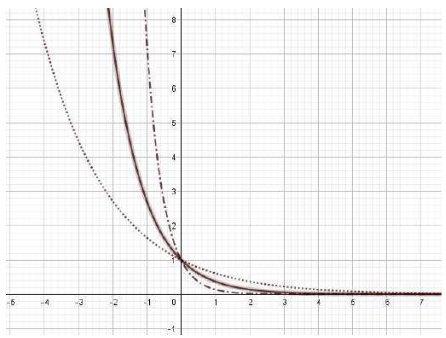
➢ <u>**Fonction $\boldsymbol{x \mapsto \exp(ax+b)}$**</u>

Soient a et b sont des nombres réels, la fonction $g : x \mapsto \exp(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{g'(x) = a\exp(ax+b)}$

Pour tout x réel, $g(x) = e^{kx}$, avec k réel strictement positif.



Pour tout x réel, $h(x) = e^{-kx}$, avec k réel strictement positif.



Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes, où x désigne un nombre réel.

a) $e^x \times e^{3x-1}$

b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}}$

c) $(e^{5x})^3$

d) $(e^x - 1)(e^x + 1)$

e) $\frac{e^{-x} \times e^{9x}}{e^{3x}}$

f) $e^x \times e^{5x-2} \times e$

g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x$

h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2}$

Exercice 2

Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'il s'agit d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n} \times e^{7n}}{e^{3n}}$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{3x-7} = -2$

b) $(e^x)^2 - 1 = 0$

c) $e^{-3x+8} = e^{-5}$

d) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^x > e$

2) $e^{-3x+1} \geqslant e^4$

3) $e^{7x-21} < 1$

4) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0$

5) $e^x \leqslant 0$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$

Géométrie repérée : vecteurs et droites du plan - rappels de cours

Rappels : vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\boldsymbol{\vec{v} = k\vec{u}}$**.**

Caractérisation de la colinéarité

Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est à dire, si et seulement si leur déterminant est nul. **det** $(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$**.**

Rappels : vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** s'ils ont des directions perpendiculaires.

Caractérisation de l'orthogonalité

Dans un repère du plan, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0}$**.**

Rappels : vecteur directeur et vecteur normal d'une droite :

Soit d une droite et A et B deux points de la droite d.
Un vecteur directeur de la droite d est un vecteur $\vec{u}$, non nul, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Un vecteur normal de la droite d est un vecteur $\vec{n}$, non nul, orthogonal à un vecteur directeur de d.

Rappels : équation cartésienne d'une droite :

L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ avec a, b, c des réels et $(a; b) \neq (0; 0)$ est **une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{a}{b}$.**

Une équation d'une droite (d) de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est appelée une **équation cartésienne** de la droite (d).

Rappels : équation réduite d'une droite :

- Toute droite du plan **non parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $\boldsymbol{y = mx + p}$, où m et p sont des réels.
  Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}\binom{1}{m}$, où **m est le coefficient directeur (ou pente)** de la droite et **p est l'ordonnée à l'origine**.

Dans ce cas, le coefficient directeur (ou pente) de la droite (d) passant par les points A et B distincts est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

- Toute droite du plan **parallèle à l'axe des ordonnées** admet **une équation réduite** de la forme $\boldsymbol{x = k}$, où k est un réel.
  Cette droite admet $\vec{v}\binom{0}{1}$ comme vecteur directeur ; elle n'a ni pente, ni ordonnée à l'origine.

Rappels : équation cartésienne d'un cercle :

Soit $A(x_A\,; y_A)$ un point du plan de R un réel strictement positif.
L'ensemble des points $M(x\,; y)$ du plan tels que $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \mathrm{R}^2$ est le cercle C de centre A et de rayon R.

L'équation $\boldsymbol{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \mathrm{R}^2}$ est une équation cartésienne du cercle C.

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

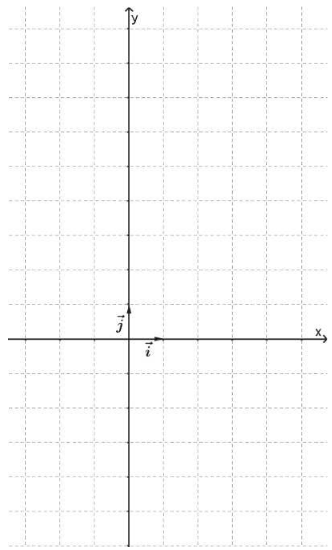
Exercice 1

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{5}{9}\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\binom{-2}{3}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2

1. Soit la droite D passant par le point $\boldsymbol{A(1\,;\,4)}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-2}{5}$. Quelle est son équation cartésienne ?
2. Soit la droite Δ passant par le point $\boldsymbol{B(1\,;\,-4)}$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{2}{5}$. Quelle est son équation cartésienne ?
3. Tracer les droites $\boldsymbol{D}$ et Δ dans le repère ci-dessous. Placer aussi les points $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ainsi qu'un représentant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.



Exercice 3

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ et un vecteur normal $\vec{v}$ de la droite $\boldsymbol{d}$ dont une équation cartésienne est $\boldsymbol{-3x + 2y + 1 = 0}$
2. Quelle est l'équation réduite de cette droite ?
3. Le point $\boldsymbol{A(5\,;-7)}$ appartient-il à $\boldsymbol{d}$? Justifier.
4. Déterminer les coordonnées du point $\boldsymbol{E}$, intersection de $\boldsymbol{d}$ et de l'axe des abscisses.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\boldsymbol{d'}$, perpendiculaire à $\boldsymbol{d}$ et passant par $\boldsymbol{A}$.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne les points $A(-3\,;\,1)$ et B(2 ; -2) ainsi que la droite d d'équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Justifier que les droites d et (AB) sont sécantes puis donner les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à la droite d et passant par $C(-1\,;\,-3)$.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,; I\,; J)$ orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(3\,;-1)$ et de rayon 5.

1. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Parmi les points ci-dessous, lesquels appartiennent au cercle $\mathscr{C}$:
   $M(-1\,;2)$; $N\left(\frac{8}{5}\,;-\frac{29}{5}\right)$; $P\left(\frac{9}{5}\,;\frac{2}{5}\right)$

Problème 5

Dans le plan muni d'un repère $(O\,; I\,; J)$, on considère les trois points : $A(-3\,;2)$; $B(3\,;5)$; $C(2\,;2)$

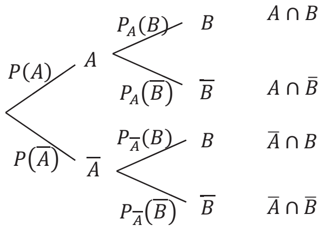
1. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur du triangle ABC issue du sommet C.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Probabilités : rappels de cours

On considère une loi de probabilité P définie sur un univers Ω.

- <u>Probabilités conditionnelles</u>
  A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
  - La probabilité de B sachant A est : $\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
  - $\boldsymbol{P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)}$ et $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

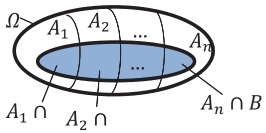
- <u>Représentation à l'aide d'un arbre ou d'un tableau</u>



	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

1) la somme des probabilités des branches issues d'un même événement est toujours égale à 1.
2) la probabilité de $A \cap B$ est obtenue en multipliant les probabilités le long des branches aboutissant à B et passant par A.

- <u>Formule des probabilités totales</u>
  Si $A_1, A_2, \dots A_n$ constitue **une partition de l'univers $\boldsymbol{\Omega}$** et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors, pour tout événement B, on a:
  $\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)}$
  $\boldsymbol{= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$



- <u>Indépendance de deux événements</u>
  - On dit que les événements A et B sont **indépendants** si : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.
  - Si $P(A) \neq 0$, on a : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

- <u>Variable aléatoire</u>
  - <u>Définition</u> : Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Une **variable aléatoire**, notée $\boldsymbol{X}$, est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.
  - Soit une expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble fini Ω.
    Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω et prenant les valeurs $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.
    On définit **la loi de probabilité** de X quand à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on associe la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.
    On peut donc établir le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	$P(X = x_n)$

  - L'**espérance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{E(X)}$, est le nombre réel défini par :
$$\boldsymbol{E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$
  - La **variance** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{V(X)}$, est le nombre réel défini par :
$$\boldsymbol{V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2}$$
  - L'**écart-type** de la variable aléatoire X, notée $\boldsymbol{\sigma(X)}$, est le nombre réel défini par :
$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exercices : probabilités

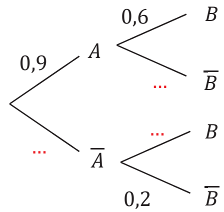
Exercice 1

Une association sportive organise une grande loterie. Les 2 000 billets vendus sont numérotés de 1 à 2 000.
Parmi tous ces billets :
- Un billet rapporte un lot de 1 200 € (*c'est le plus gros lot*);
- Quatre billets rapportent chacun un lot de 200 €.
- Dix billets rapportent chacun un lot de 50 €.
- Tous les autres billets ne rapportent rien.

Le prix du billet est fixé à 2 €. Les billets achetés sont choisis au hasard.
X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.
1) Donner la loi de probabilité de X ?
2) Déterminer l'espérance $E(X)$, arrondie au centième, puis interpréter la valeur obtenue.
3) Au lieu de rapporter 1 200 €, combien doit rapporter le plus gros lot afin que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

On considère l'arbre pondéré ci-contre.
Le compléter puis calculer :
1) $P(A \cap B)$.
2) $P(B)$.
3) $P(A \cup B)$.
4) $P_B(A)$. On arrondira à 10^{-2}.



Exercice 3

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants : H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
C : « l'arbre choisi est un conifère »
F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.