Éléments de correction

Exercices : second degré

Exercice 1

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \; ou \; x-1 = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 1 \Leftrightarrow S = \{-4; 1\}$

2) $f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25 = 6{,}25 \Leftrightarrow -(x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1{,}5 = 0$

$f(x) = 6{,}25 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \Leftrightarrow S = \{-1{,}5\}$

3) f est une fonction polynôme de degré 2 telle que : $f(x) = -(x+1{,}5)^2 + 6{,}25$ avec $a = -1$; $\alpha = -1{,}5$ et $\beta = 6{,}25$.

Comme $a = -1 < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty\,; -1{,}5]$ et strictement décroissante sur $[-1{,}5\,; +\infty[$.

f admet un maximum $\beta = 6{,}25$ atteint en $x = -1{,}5$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1{,}5$	$+\infty$
Variations de f	↗	6,25	↘

Exercice 2

Dans chaque cas, on a l'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

° On regarde si la parabole est tournée vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$). C_3 est la seule tournée vers le bas et f_2 a pour coefficient a le nombre -1. Donc **C_3 représente f_2**.

° Le sommet de la parabole est $S(\alpha\,;\beta)$. Pour f_3, on obtient $S_3(-1\,; 2)$. C'est donc **C_4 qui représente f_3.**

° Pour les deux paraboles restantes, le sommet est le même (de coordonnées $(-1\,; 2)$) ; il faut donc les distinguer autrement, par exemple en calculant $f(0)$: $f_1(0) = 3$. C'est donc **C_2 qui représente f_1.** On en déduit que **C_1 représente f_4.**

Remarque : il y a d'autres façons de faire ; on peut, par exemple, calculer l'image de 0,5 par chacune des fonctions et regarder quelle courbe passe par le point de coordonnées $(0{,}5\,; f(0{,}5))$

Exercice 3

a) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\mathbf{2x^2 + 3x - 5}$ est un trinôme et **1** en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = 1 \times x_2 = x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2{,}5; 1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-3-7}{4} = -\frac{10}{4} = -2{,}5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\quad S = \{-2{,}5\,; 1\}$.

b) $-5x^2 + 7x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 49 - 80 = -31$.

$\Delta < 0$ l'équation n'admet aucune solution réelle $S = \emptyset$.

c) $9x^2 - 18x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 3 + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3} = 1$

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 9 \times 9 = 324 - 324 = 0$

$\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2\times9} = \frac{18}{18} = 1$. $\quad S = \{1\}$.

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\mathbf{x^2 + 3x + 2}$ est un trinôme et $\mathbf{-1}$ en est une solution évidente donc il admet une deuxième racine (éventuellement égale à la première).

En utilisant le produit des racines, $P = -1 \times x_2 \Leftrightarrow -x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{1} = -2$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $S = \{-2; -1\}$.

Ou méthode avec le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$

$\Delta > 0$ l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{-3-1}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ $\quad S = \{-2; -1\}$.

Exercice 4

a) $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 9 + 40 = 49$.

$\Delta > 0$ $f(x)$ est factorisable et s'écrit : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2\times1} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Donc $f(x) = (x+2)(x-5)$.

b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83$. $\Delta < 0$, $g(x)$ ne se factorise pas.

c) $\Delta = 40^2 - 4 \times (-8) \times (-50) = 1600 - 1600 = 0$

$\Delta = 0$, $h(x)$ est factorisable et s'écrit : $h(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2\times(-8)} = \frac{-40}{-16} = 2{,}5$.

Donc $h(x) = -8(x - 2{,}5)^2$

Exercice 5

Méthode : On calcule Δ, on cherche les racines éventuelles, on fait le tableau de signes et on lit les solutions de l'inéquation dans le tableau.

1) $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$; signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 1$) ;
$s_1 =]-\infty\,; -2[\;\cup\;]1\,; +\infty[$

2) $\Delta = -23$; le trinôme n'a pas de racine; il a le signe de a pour tout réel x.
$a = -3$, donc, pour tout x, $-3x^2 + x - 2 \leq 0$. $\quad s_2 =]-\infty\,; +\infty[$

3) Par factorisation (ou calcul de Δ) : $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$;

signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ; $\quad s_3 =]-\infty\,; -\frac{3}{2}] \cup [0\,; +\infty[$

4) $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. signe de a « à l'extérieur des racines » ($a = 2$) ;
$s_4 =]-2\,; 2[$

Problème 1

a) « L'entreprise vend toute sa production à un prix à la tonne fixe. L'activité est à l'équilibre pour la production et la vente de 25 tonnes de pâte. »

Donc le prix de vente à la tonne est donné par :

$\frac{C(25)}{25} = \frac{25^2+632\times25+1075}{25} = \frac{625+15\,800+1\,075}{25} = \frac{17\,500}{25} = 700$ Le prix de vente à la tonne est 700 €.

b) Soit $B(q)$ l'expression du bénéfice en fonction de q, avec $q \in [0; 60]$.

$B(q) = R(q) - C(q) = 700q - (q^2 + 632q + 1075) = 700q - q^2 - 632q - 1075$

$B(q) = -q^2 + 68q - 1075$

c) Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation $B(q) > 0$ c'est-à-dire
$-q^2 + 68q - 1075 > 0$.

$\Delta = 68^2 - 4 \times (-1) \times (-1075) = 324$, $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles :

$q_1 = \frac{-68-\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68-18}{-2} = \frac{86}{2} = 43$ et $q_2 = \frac{-68+\sqrt{324}}{2\times(-1)} = \frac{-68+18}{-2} = \frac{50}{2} = 25$.

B admet le tableau de signes suivant :

q	0		25		43		60
Signe de $B(q)$		−	0	+	0	−	

Ainsi, les solutions de l'inéquation $-q^2 + 68q - 1075 > 0$ sont : $S =]25; 43[$

Pour que l'activité soit rentable, la production doit se situer dans l'intervalle $]25; 43[$.

Exercices : dérivation

Exercice 1

1) **a.** $f'(-3) = 9$ et $f(-3) = -2$.
b. $f'(-2) = 0$ et $f(-2) = 2$.
c. $f'(-1) = -3$ et $f(-1) = 0$.

2) L'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse -3 est :
$y = f'(-3)\big(x-(-3)\big) + f(-3) = 9\,(x+3) - 2 = 9\,x + 27\, - 2 = 9\,x + 25$

L'équation réduite de la tangente T_1 à C_f au point d'abscisse -2 est :
$y = f'(-2)\big(x-(-2)\big) + f(-2) = 0\,(x+2) + 2 = 2$

L'équation réduite de la tangente T_2 à C_f au point d'abscisse -1 est :
$y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1) = -3\,(x+1) + 0 = -3x - 3$

3) Le nombre dérivé est négatif sur]–2 ; 0[(car *f* décroît sur cet intervalle)
4) Le nombre dérivé est positif sur]$-\infty$; -2[et sur]0; $+\infty$[(car *f* est croissante sur ces intervalles)

Exercice 2

1) $f'(x) = 4x$
2) $g'(x) = 4x^3 + 6x^2$
3) $h'(x) = -\frac{4}{x^5}$
4) $i'(x) = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$

Exercice 3

On utilise le théorème du cours liant le signe de la dérivée et les variations de la fonction.
° C_1 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle]$-\infty$; $-0{,}5$] et sur [0 ;0,5] donc f_1 est positive sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est croissante sur ces intervalles.
° C_1 est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle [–0,5 ; 0] et sur [0,5 ; $+\infty$[donc f_1 est négative sur ces intervalles ; d'autre part f_2 est décroissante sur ces intervalles.
On peut donc en conclure que C_2 représente *f* et C_1 représente *f* '.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - x$

1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
2)
$\Delta = 16$ donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$
Le trinôme $3x^2 + 2x - 1$ a le signe de a ($a = 3$) « à l'extérieur des racines ».
3)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
variations de f		↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗	

4) $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 = 8 + 4 - 2 = 10$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$
L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est :
$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 15\,(x-2) + 10 = 15x - 30 + 10 = 15x - 20$

Exercice 5

1) $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ ..... *f* est décroissante sur]0 ; $\frac{1}{3}$] et croissante sur [$\frac{1}{3}$; + ∞[

2) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ ..... *f* est décroissante sur [–1; 0[et sur]0 ; 1] et *f* est croissante sur] –∞; –1] et sur [1 ; +∞[

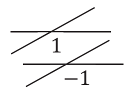
3) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ ..... *f* est croissante sur]-∞ ; 0] et décroissante sur [0 ; + ∞[

Problème 2

1) $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$
2) et 3)
$h'(x)$ s'annule pour :$3(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = ou\; x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \quad ou \qquad x = -1$
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		–	0	+		+	
Signe de $x+1$		–		–	0	+	
Signe de $h'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de h		↗	4	↘	0	↗	

$m > 0$ donc
$m > 0$ donc



Pour tout $x \in [0; 1[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.
Pour tout $x \in]1; +\infty[$: $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$ et C_f est au-dessus de $\mathcal{D}$.
Pour $x = 1$: $h(x) = f(x) - g(x) = 0$, donc C_f et $\mathcal{D}$ sont sécantes au point d'abscisse 1.

Exercices : suite

Exercice 1 $u_5 = \frac{2\times5+1}{5+1} = \frac{11}{6}$

Exercice 2

1) $u_0 = (0+5)^2 + 2 = 27$ $\quad u_1 = (1+5)^2 + 2 = 38$ $\quad u_2 = (2+5)^2 + 2 = 51$
1) $u_{n+1} = \left((n+1)+5\right)^2 + 2 = (n+6)^2 + 2 = n^2 + 12n + 36 + 2 = n^2 + 12n + 38$
2) $u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - (n+5)^2 - 2 = n^2 + 12n + 38 - (n^2 + 10n + 25) - 2$
$u_{n+1} - u_n = n^2 + 12n + 38 - n^2 - 10n - 25 - 2 = 2n + 11$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 11$
Ainsi, pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

$u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 3 - 4 = 6 - 4 = 2$
$u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times 2 - 4 = 4 - 4 = 0$
$u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times 0 - 4 = -4$

Exercice 4

$u_1 = \frac{4}{3}$; $u_2 = \frac{7}{4}$; $u_3 = \frac{11}{7}$

Exercice 5

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 16 + 4n$.
2) $u_6 = 16 + 4 \times 6 = 16 + 24 = 40$.

Exercice 6

On calcule les trois premiers termes, par exemple :
$u_0 = 0$ $\quad u_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$ $\quad u_2 = 2^2 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$
Calculons les différences :
$u_1 - u_0 = 5 - 0 = 5$ $\quad u_2 - u_1 = 12 - 5 = 7$ $\quad$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$
Ainsi, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 7 - (4n+7) = 4n + 4 + 7 - 4n - 7 = 4$
Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4 \times 0 + 7 = 7$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = 9$ et $u_{20} = 28$.
1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r$

$u_{20} = 28 \Leftrightarrow u_0 + 20r = 28 \Leftrightarrow u_0 = 28 - 20r$

Ainsi, $9 - 5r = 28 - 20r \Leftrightarrow -5r + 20r = 28 - 9 \Leftrightarrow 15r = 19 \Leftrightarrow r = \frac{19}{15}$

2) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{19}{15} > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

3) *Méthode 1* : Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$u_5 = 9 \Leftrightarrow u_0 + 5r = 9 \Leftrightarrow u_0 = 9 - 5r = 9 - 5 \times \frac{19}{15} = 9 - \frac{19}{3} = \frac{8}{3}$

Donc $u_{50} = \frac{8}{3} + 50 \times \frac{19}{15} = 66$.

Méthode 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n-p)r$
$u_{50} = u_5 + (50-5)\frac{19}{15} = 9 + 45 \times \frac{19}{15} = 66$

Exercice 9

1) Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 2 \times 3^n$
2) $u_3 = u_0 q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison positive telle que $u_0 = 7$ et $u_2 = 28$.
Déterminer la raison de cette suite, puis calculer u_5.
Pour tout $\in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 7 \times q^n$

$u_2 = 28 \Leftrightarrow 7 \times q^2 = 28 \Leftrightarrow q^2 = \frac{28}{7} = 4$

Comme q est positif on en déduit que $q = \sqrt{4} = 2$

$u_5 = 7 \times 2^5 = 224$

Exercice 11

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 12

1) $v_2 = v_1 \times q = 480 \times \frac{1}{2} = 240$; $v_3 = 120$; $v_4 = 60$.

2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $v_{n+1} - v_n = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -240 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$-240 < 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ (car $\frac{1}{2} > 0$ et ses puissances aussi).

Donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite est décroissante.

Problème 3

1)
$v_1 = v_0 + 15 = 20 + 15 = 35$; $v_2 = v_1 + 15 = 35 + 15 = 50$; $v_3 = v_2 + 15 = 50 + 15 = 65$

2) v_{n+1} représente le nombre de Smartphones vendus le mois $n+1$ de l'année 2016 or ce commercial arrive à vendre chaque mois 15 Smartphones de plus que le mois précédent. Donc : $v_{n+1} = v_n + 15$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$.

3) La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $v_0 = 20$ donc :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$
$\boxed{v_n = 20 + 15n}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n > 200 \Leftrightarrow 20 + 15n > 200 \Leftrightarrow 15n > 180 \Leftrightarrow n > \frac{180}{15} \Leftrightarrow n > 12$
Donc à partir du mois de janvier 2017 il vend plus de 200 Smartphones par mois.

Problème 4

a) $Q_1 = 4\,500 \times 1{,}03 =$ **4 635 €** et $Q_2 = 4\,635 \times 1{,}03 =$ **4 774,05 €**.

b) La suite (Q_n) est une **suite géométrique de raison q = 1,03 et de terme initial Q_0 = 4 500**.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = Q_0 \times q^n$, donc $\mathbf{Q_n = 4\,500 \times 1{,}03^n}$.

d) On cherche le plus petit entier N tel que $4\,500 \times 1{,}03^N > 9\,000$. On trouve N = 24.
2015 + 24 = 2039 donc le loyer dépassera le double du loyer initial en 2039.

Exercices : fonction exponentielle

Exercice 1

a) $e^x \times e^{3x-1} = e^{x+3x-1} = e^{4x-1}$

b) $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e^{-x-(4-x)} = e^{-x-4+x} = e^{-4}$

c) $(e^{5x})^3 = e^{5x\times 3} = e^{15x}$

d) $(e^x - 1)(e^x + 1) = (e^x)^2 - 1^2 = e^{2x} - 1$

e) $\frac{e^{-x}\times e^{9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{-x+9x}}{e^{3x}} = \frac{e^{8x}}{e^{3x}} = e^{8x-3x} = e^{5x}$

f) $e^x \times e^{5x-2} \times e = e^{x+5x-2+1} = e^{6x-1}$

g) $\frac{e^{-x}}{e^{7-x}} \times e^x = e^{-x-(7-x)} \times e^x = e^{-x-7+x+x} = e^{-7+x}$

h) $\frac{e^{x+4}}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{x+4}}{e^{6x}} = e^{x+4-6x} = e^{-5x+4}$

Exercice 2

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^{-7n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-7n}$. donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-7}$ et de premier terme $u_0 = e^{-7\times 0} = e^0 = 1$.

b) (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{e^{-2n}\times e^{7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{-2n+7n}}{e^{3n}} = \frac{e^{5n}}{e^{3n}} = e^{5n-3n} = e^{2n}$. donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = e^2$ et de premier terme $v_0 = e^{2\times 0} = e^0 = 1$.

c) (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (e^{-4n})^{-2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = (e^{-4n})^{-2} = e^{-4n\times(-2)} = e^{8n}$. donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = e^8$ et de premier terme $w_0 = e^{8\times 0} = e^0 = 1$.

Exercice 3

a) $e^{3x-7} = -2$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{3x-7} > 0$ donc $S = \emptyset$.

b) $(e^x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $S = \{0\}$.

c) $e^{-3x+8} = e^{-5} \Leftrightarrow -3x + 8 = -5 \Leftrightarrow -3x = -13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$ donc $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.

d) $e^{x^2} - e = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ *ou* $x = 1$ donc $S = \{-1; 1\}$.

Exercice 4

a) $e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]1; +\infty[$.

b) $e^{-3x+1} \geqslant e^4 \Leftrightarrow -3x + 1 \geqslant 4$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -3x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant -1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -1]$.

c) $e^{7x-21} < 1 \Leftrightarrow e^{7x-21} < e^0 \Leftrightarrow 7x - 21 < 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; 3[$.

d) $e^{-2x+5} - e^{8x-3} \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-2x+5} \leqslant e^{8x-3} \Leftrightarrow -2x + 5 \leqslant 8x - 3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow -2x - 8x \leqslant -5 - 3 \Leftrightarrow -10x \leqslant -8 \Leftrightarrow x \geqslant 0{,}8$
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [0{,}8; +\infty[$

e) $e^x \leqslant 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ donc $S = \emptyset$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction.

a) $f : x \mapsto e^{4x+1} - 4x + 7$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = 4\,e^{4x+1} - 4 = 4(e^{4x+1} - 1)$, pour tout réel x.
On obtient le signe de $f'(x)$ en résolvant l'inéquation $4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0$.
$4(e^{4x+1} - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} \geqslant e^0 \Leftrightarrow 4x + 1 \geqslant 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{-1}{4}$
Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$\searrow$	9	$\nearrow$

$f\left(\frac{-1}{4}\right) = e^{4\times\frac{-1}{4}+1} - 4 \times \left(\frac{-1}{4}\right) + 7 = 1 + 1 + 7 = 9$

b) $g : x \mapsto xe^{5x}$
g est de la forme $u \times v$ avec, pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{5x}$
Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 5e^{5x}$
Et $g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 1 \times e^{5x} + 5e^{5x} \times x = (5x + 1)e^{5x}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{5x} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $5x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Or $5x + 1 > 0 \Leftrightarrow 5x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}$.
Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	$\searrow$	$-\frac{1}{5}e^{-1}$	$\nearrow$

$g\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5}e^{5\times\left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{1}{5}e^{-1}$

c) $h : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$
La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. (car $e^x > 0$ pour tout x réels)
h est de la forme $\frac{1}{v}$ avec, pour tout réel x, $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$
Et $h'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-e^x < 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $h'(x)$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, et la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) $k : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x+3}$
k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
k est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, pour tout réel x, $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^x + 3$
Donc $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$
Et $k'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x\times(e^x+3) - (e^x+1)\times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3-e^x-1)\times e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+3)^2}$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$ donc $k'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et la fonction k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices : Géométrie repérée, vecteurs et droites du plan

Exercice 1

1. $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{9} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \times (-\frac{5}{9}) - \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$. Donc ces vecteurs sont colinéaires.

$\vec{u}.\vec{w} = -\frac{3}{2} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 3 = 3 + \frac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Exercice 2

1. Soit M$(x\,;\,y)$ un point du plan.

M $\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0$
$\Leftrightarrow 5(x-1) - (-2)(y-4) = 0$
$\Leftrightarrow 5x - 5 + 2y - 8 = 0$
$\Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

Une équation cartésienne de D est $5x + 2y - 13 = 0$

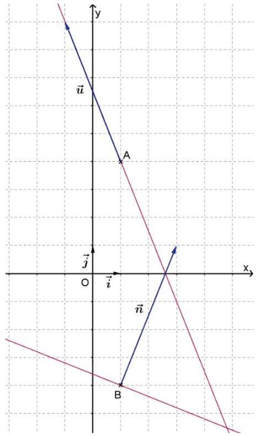
2. Soit M$(x\,;\,y)$ un point du plan.

M $\in \varDelta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\,.\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-1) + 5(y+4) = 0$
$\Leftrightarrow 2x - 2 + 5y + 20 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 5y + 18 = 0$

Une équation cartésienne de $\varDelta$ est $2x + 5y + 18 = 0$

3.



Exercice 3

1. La droite d'équation$-3x + 2y + 1 = 0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\binom{-2}{-3}$ et pour vecteur normal $\vec{v}\binom{-3}{2}$

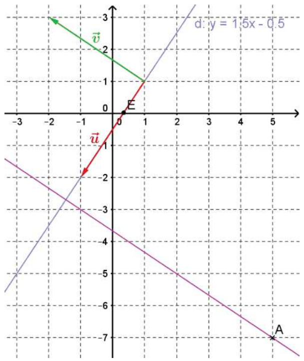
2. $-3x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ qui est l'équation réduite de cette droite.

3. $A(5\,;-7)$ appartient à d si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de d.
Or $-3 \times 5 + 2 \times (-7) + 1 = -15 - 14 + 1 \neq 0$ donc $A \notin d$

4. E appartient à l'axe des abscisses donc son ordonnée est nulle.
$\boldsymbol{E(x_E\,;0) \in d \Leftrightarrow -3x_E + 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x_E = -1 \Leftrightarrow x_E = \frac{1}{3}}$
donc $\boldsymbol{E(\frac{1}{3}\,;0)}$

5. La droite $\boldsymbol{d'}$ est perpendiculaire à d donc elle admet le vecteur $\boldsymbol{\vec{u}}$ comme vecteur normal et son équation est de la forme $\boldsymbol{-2x - 3y + c = 0}$
De plus, $\boldsymbol{A(5\,;-7) \in d'}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{-2 \times 5 - 3 \times (-7) + c = 0}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{-10 + 21 + c = 0 \Leftrightarrow c = -11}$
Ainsi une équation cartésienne de $\boldsymbol{d'}$ est $\boldsymbol{-2x - 3y - 11 = 0}$ et une autre équation, plus simple, $\boldsymbol{2x + 3y + 11 = 0}$

On peut vérifier toutes nos réponses en traçant les droites et vecteurs dans un repère :



Exercice 4

1. $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} (-3)-2 \\ -1-(-2) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\binom{-5}{3}$

La droite (AB) admet le vecteur $\overrightarrow{BA}$ comme vecteur directeur donc une équation cartésienne est de la forme $3x + 5y + c = 0$
Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) + 5 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4$
Ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est $3x + 5y + 4 = 0$

2. d a pour équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet comme vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{3}$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}\binom{5}{-3}$. Ainsi les droites d et (AB) ne sont pas parallèles.
Leur point d'intersection est le point dont les coordonnées vérifient le système :
$(S)\begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$ on peut le résoudre par combinaisons linéaires en soustrayant les deux équations :

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ 9y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 4 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 \times (-1) + 4 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -1 \end{cases}$

Le point d'intersection de d et de (AB) est le point de coordonnées $(\frac{1}{3}\,;-1)$

3. $\varDelta$ est parallèle à d d'équation cartésienne $3x - 4y - 5 = 0$ donc elle admet le même vecteur directeur et son équation est de la forme $3x - 4y + c = 0$
Or $C(-1\,;-3) \in \varDelta \Leftrightarrow 3 \times (-1) - 4 \times (-3) + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$
Donc l'équation de $\varDelta$ est : $3x - 4y - 9 = 0$

Exercice 5

1. L'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre K et de rayon R est de la forme :
$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2$ donc, ici : $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$

2. Un point appartient à un cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.
Pour $M(-1\,;2) : (-1-3)^2 + (2+1)^2 = 16 + 9 = 25$ donc $M \in \mathscr{C}$
Pour $N(\frac{8}{5}\,;-\frac{29}{5}) : \left(\frac{8}{5} - 3\right)^2 + \left(-\frac{29}{5} + 1\right)^2 = (-\frac{7}{5})^2 + \left(-\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} + \frac{576}{25} = \frac{625}{25} = 25$ donc $N \in \mathscr{C}$
Pour $P(\frac{9}{5}\,;\frac{2}{5}) : \left(\frac{9}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + 1\right)^2 = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} + \frac{49}{25} = \frac{85}{25} = \frac{17}{5} \neq 25$ donc $P \notin \mathscr{C}$

Problème 5

1. On chercher les équations de (AB) et de la hauteur car H est l'intersection de ces deux droites.

- $\overrightarrow{AB}\binom{3-(-3)}{5-2}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{6}{3}$
La hauteur (HC) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal donc elle admet une équation cartésienne de la forme $6x + 3y + c = 0$
Et $C \in (HC)$ donc $6 \times 2 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -18$
Ainsi, la hauteur issue de C a pour équation cartésienne $6x + 3y - 18 = 0$
- La droite (AB) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur donc elle admet une équation cartésienne de la forme $3x - 6y + c = 0$
Et $A \in (AB)$ donc $3 \times (-3) - 6 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 21$
Ainsi (AB) a pour équation cartésienne $3x - 6y + 21 = 0$
- H est l'intersection des droites (AB) et (HC), ses coordonnées vérifient le système :
$(S)\begin{cases} 3x - 6y + 21 = 0 \\ 6x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$ (on pouvait simplifier les équations pour résoudre par substitution).
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 2(2y - 7) + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 4y - 14 + y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ 5y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 7 \\ y = 4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 4 - 7 = 1 \\ y = 4 \end{cases}$
Donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est $H(1\,;4)$.

2. $Aire(ABC) = \frac{AB \times CH}{2}$
On calcule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
et $CH = \sqrt{(x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$
$Aire(ABC) = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$
L'aire du triangle ABC est 7,5.

Exercices : probabilités

Exercice 1

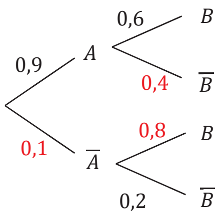
1) X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de l'acheteur d'un billet.
Cette variable aléatoire prend les valeurs :
-2 ; 48 ; 198 et $1\,198$.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc :

x_i en €	-2	48	198	$1\,198$
$p(X = x_i)$	$\frac{1985}{2000}$	$\frac{10}{2000}$	$\frac{4}{2000}$	$\frac{1}{2000}$

2) $E(X) = \frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times 1198 = -\frac{3}{4}$
Le gain moyen que peut espérer un joueur est de $-0{,}75$ €.
L'espérance est négative donc le jeu n'est pas favorable aux joueurs.

3) Soit x la somme rapportée par le plus gros lot.
Le jeu est équitable lorsque :
$E(X) = 0$ c'est-à-dire $\frac{1985}{2000} \times (-2) + \frac{10}{2000} \times 48 + \frac{4}{2000} \times 198 + \frac{1}{2000} \times (x-2) = 0$
c'est-à-dire $-\frac{2698}{2000} + \frac{1}{2000} \times (x-2) = 0$
c'est-à-dire $x = \frac{2698}{2000} \times 2000 + 2 = 2700$
Ainsi, le plus gros lot doit rapporter 2 700 € afin que le jeu soit équitable.

Exercice 2



1) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54$
2) A et $\overline{A}$ constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) = 0{,}54 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}54 + 0{,}08 = 0{,}62$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9 + 0{,}62 - 0{,}54 = 0{,}98$
4) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}54}{0{,}62} \approx 0{,}87$

Exercice 3

a. Voilà l'arbre pondéré traduisant la situation de l'exercice :

b. $P(C \cap H_3) = P_{H_3}(C) \times P(H_3) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.
La probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 est de **0,12**.

c. H_1 , H_2 et H_3 constitue une partition de l'univers Ω donc d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12 = 0{,}525$.
La probabilité de l'événement C est donc bien égale à **0,525**.

d. On cherche $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} \approx 0.533$$

Sachant que l'arbre choisi est un conifère, la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 est donc environ égale à **0,533**.