Chapitre 10 Vecteurs

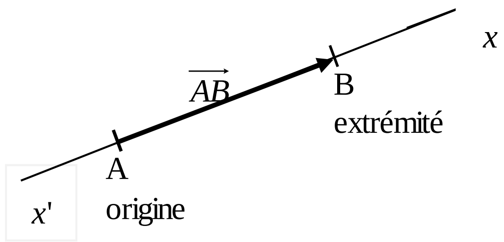
Leçon 23 Vecteurs du plan

Le cours

1. Vecteurs

Définition :

Un vecteur est un segment de droite orienté.
Le premier point, A, est l'origine, le second, B, est l'extrémité du vecteur AB.



Un vecteur est déterminé par :

- Sa direction,
- Son sens,
- Sa longueur (sa norme).

On désigne ce vecteur par la notation $\overrightarrow{AB}$ (lire « vecteur AB »)
On peut utiliser une seule lettre pour désigner un vecteur quelconque d'une famille de vecteurs égaux : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- Une unité de longueur étant choisie, la longueur du segment $[AB]$ est la longueur de $\overrightarrow{AB}$ (on dit parfois son module, ou son intensité).

Cette longueur se représente par la notation $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ou $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

2. Vecteurs de même direction

Ce sont des vecteurs dont les supports sont des droites parallèles (fig. 1) ou confondues (fig. 2).
Ces vecteurs sont également dits ***colinéaires***.

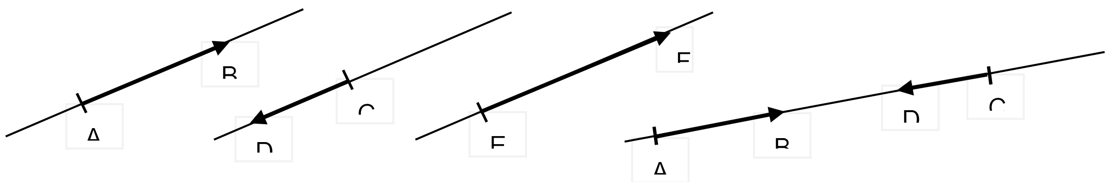


Fig. 1 fig.2

Vecteurs de même direction ou colinéaires

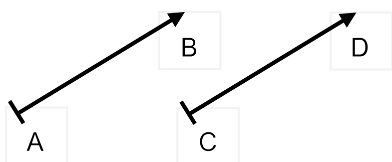
3. Vecteurs égaux

Définition

On dit que deux vecteurs sont ***égaux (équipollents)*** lorsqu'ils ont :

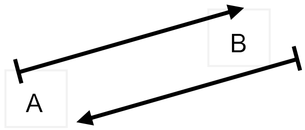
- même sens et
- même longueur.

On note : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



4. Vecteurs particuliers

- Vecteur nul $\vec{0}$:
  Tout vecteur ayant l'extrémité confondue avec l'origine est le vecteur nul : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
  Sa norme est nulle, sa direction n'est pas définie.
- Vecteurs opposés :
  Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont :
  - même direction,
  - même longueur et
  - des sens contraires.

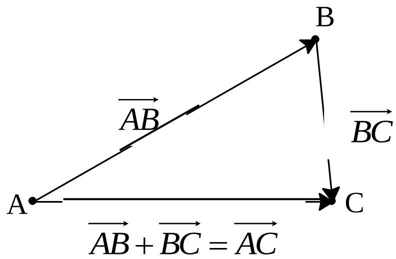


  Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. On note : $\overrightarrow{AA} = -\overrightarrow{BA}$

5. Relation de Chasles

Soit deux points A et C.

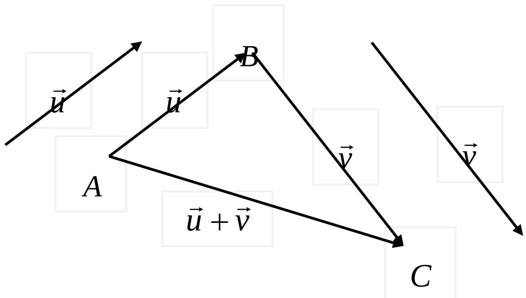
Quel que soit le point B, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



6. Somme de deux vecteurs

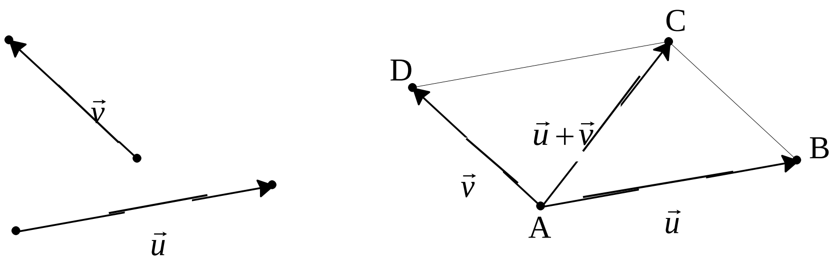
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté « $\vec{u} + \vec{v}$ », défini ainsi :
A étant un point quelconque, on place le point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$; alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Représentation de $\vec{u} + \vec{v}$ par la règle du parallélogramme.

Lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même origine A, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à $\overrightarrow{AC}$ où C est le point tel que ABCD est un parallélogramme.



Propriété : Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

7. Produit d'un vecteur par un réel

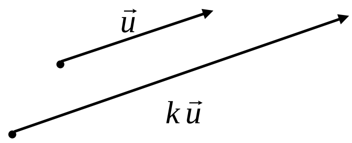
Définition:

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul et k un réel non nul.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ tel que : $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction.

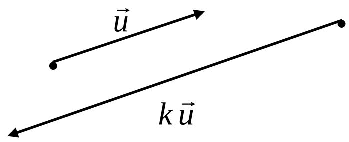
Lorsque $k>0$:

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de même sens ;
- la longueur de $k\vec{u}$ est le produit de k par la longueur de $\vec{u}$.



Lorsque $k<0$**:**

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires ;
- la longueur de $k\vec{u}$ est le produit de $(-k)$ par la longueur de $\vec{u}$.



La norme de $k\vec{u}$ est le produit de la norme de $\vec{u}$ par la valeur absolue de k : $|k\vec{u}|=|k|\times|\vec{u}|$.

Remarque : Lorsque $\vec{u}=0$ ou $k=0$, par convention : $k\vec{u}=\vec{0}$.

8. Repère et coordonnées

- Soit M un point quelconque du plan de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, il existe un couple $(x\,;\,y)$ de nombres réels tels que : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

$\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires de coordonnées respectives $(1\,;\,0)$ *et* $(0\,;\,1)$.

On note $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

Le couple $(x\,;\,y)$ est le couple de coordonnées du point M ou de vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ signifie que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

On note alors $\vec{u}(x\,;\,y)$ ou bien $\vec{u}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

Théorème

- Soit deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$.

On écrit $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{bmatrix}$

- Un vecteur nul est un vecteur de cordonnées $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. On écrit $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9. Propriétés des coordonnées

Soit deux vecteurs de coordonnées $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ si et seulement si : $a = c$ et $b = d$.
2. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$
4. $\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$, α est un réel.
5. Les vecteurs $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ sont colinéaires, si et seulement si $ad = bc$ ou $ad - bc = 0$

10. Norme d'un vecteur

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$, on considère les points $P(x_1\,;\,y_1)$ et $Q(x_2\,;\,y_2)$:

la distance PQ ou la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est calculée par :

$$PQ = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Produit scalaire dans le plan

Définition :

Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est un ***RÉEL*** $x\,x'+y\,y'$.

On le note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ (lire « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») : $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\,x'+y\,y'$.

Propriétés

1. Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et un réel a, on a:
   1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
   2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   3. $a(\vec{u}\cdot\vec{v})=(a\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(a\vec{v})$
   4. $\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{0}=0$
   5. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$
   6. $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}|^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$.
2. Si θ est la mesure de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ telle que $0\le\theta\le180°$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$.
3. Soit deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non nuls.
   1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$:

   $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\pm|\vec{u}||\vec{v}|$.

Exercices

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Exprimer les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$.

   a. $3\vec{u}-2\vec{v}=\vec{v}$ b. $2\vec{u}+\vec{w}=2\vec{w}+5\vec{u}$.
2. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires et deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{s}$ tels que $\vec{w}=(a+4b)\vec{u}+(2a+b+1)\vec{v}$, $\vec{s}=(b+2a+2)\vec{u}+(2a-3b-1)\vec{v}$.

   Trouver les réels a et b tel que $3\vec{w}=2\vec{s}$
3. Soit le segment $[AB]$. C est un point de $[AB]$ tel que $AB:CD=m:n$. O est un point situé à l'extérieur de $[AB]$. Sachant que $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{u}$, montrer que $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{m+n}(n\vec{v}+m\vec{u})$.
4. Soit un carré ABCD. M et N sont les milieux respectifs des côtés BC et

CD. Tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$, montrer que $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$.

6. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2\,;3)$, $B(-2\,;4)$ et $C(-1\,;-3)$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

7. Soit $A(3\,;2)$ et $\overrightarrow{TU}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calculer les coordonnées des points A et B tels que
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{TU}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{TU}$.

8. Soit $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Calculer :

   a. $\vec{a} - 5\vec{b}$ b. le vecteur opposé à $\vec{a} - 5\vec{b}$.

9. Citer le couple des vecteurs colinéaires.
   $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

10. Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

    a. $\overrightarrow{AO} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

    b. $\overrightarrow{AB}$ tel que A(3;2) et B(-4;1)

    c. $\overrightarrow{CD}$ tel que C(-3;4) et D(1;-2)

11. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants.

    a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

    b. $\overrightarrow{AB}$ tel que $A(1\,;2)$ et $B(5\,;7)$.

12. Résoudre les équations suivantes :

    a. $x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ b. $x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. Trouver le vecteur unitaire en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui a le même sens que chacun des vecteurs suivants :

    a. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b. $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ c. $\overrightarrow{AB}$ tel que A(1;-3) et B(-4;5).

14. Trouver le vecteur de 4 unités et colinéaires à chaque vecteurs ci-dessous.

    a. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b. $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ c. $\overrightarrow{AB}$ tel que A(1;-3) et B(-4;5).

1. Dans chacun des cas, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

   a. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ & $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ b. $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ & $\vec{v} = +\vec{j}$

2. ABC est un triangle tel que $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 3$.
   Calculer le produit scalaire suivant :

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CA}$.

3. ABC est un triangle tel que $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{C}=30^\circ$, $AB=\sqrt{2}$, $AC=2$, $BC=\sqrt{3}+1$.
   Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$.
4. Dans chacun des cas, calculer la mesure de l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   a. $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}$ & $\vec{v}=9\vec{i}+6\vec{j}$ b. $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$ & $\vec{v}=-2\vec{i}+6\vec{j}$
5. Soit trois vecteurs $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$; $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Calculer :
   a. $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ b. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$
   c. $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ d. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$
6. Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Dans chacun des cas, donner la nature de l'angle des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   a. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ b. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ c. $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$
7. Vérifier que si deux vecteurs sont perpendiculaires.
   a. $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$
8. Soit deux vecteurs $\vec{v}$ *et* $\vec{v}$ tels que $\vec{u}=(1-m)\vec{i}+2\vec{j}$ & $\vec{v}=m\vec{i}+(m+2)\vec{j}$.
   Déterminer le réel m pour que :
   a. $\vec{u}\perp\vec{v}$ b. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$
9. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Montrer que :
   a. $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$ b. $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$
10. Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que :
    a. Si $\vec{u}\perp\vec{v}$, alors $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.
    b. Si $\vec{u}\perp\vec{v}$, alors $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$.
11. ABC est un triangle rectangle en A tel que :
    $|\overrightarrow{AC}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$ *et* $|\overrightarrow{BC}|=a$. Montrer que $a^2=b^2+c^2$.
12. Soit $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=4$ *et* $|\vec{u}+\vec{v}|=6$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
13. Soit $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=3$ *et* $|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{13}$. Calculer $|2\vec{u}+\vec{v}|$.
14. Soit $|\vec{u}|=5$, $|\vec{v}|=3$ *et* $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{13}$. Calculer $|\vec{u}-\vec{v}|$.
15. Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ & $\vec{w}$ tels que $|\vec{u}|=|\vec{w}|$, $|\vec{u}-\vec{v}|=|\vec{u}+\vec{w}|$ et $(\vec{u}\,;\vec{v})=36^\circ$.
    Calculer la mesure de l'angle des vecteurs $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

Leçon 24 Vecteurs de l'espace

Repérage dans l'espace

Par analogie avec ce qui a été fait en géométrie plane, à chaque couple (A, B) de points de l'espace, on associe un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Dans le plan, la donnée d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ permet de repérer tout point M par ses deux coordonnées.

Dans l'espace, un point sera repère par trois coordonnées.

Activité 1 ***repère et coordonnées.***

Choisissons d'abord un repère de l'espace, c'est-à-dire un point O et trois vecteurs $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, de façon que trois points I, J, K ne soient pas dans un même plan.

Alors on peut repérer tout point M par ses trois coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère.

Sur la figure ci-contre : $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

La droite (MM') est parallèle a (OK) ; M' est dans le plan (OIJ).

La droite (MM'') est parallèle a (OM').

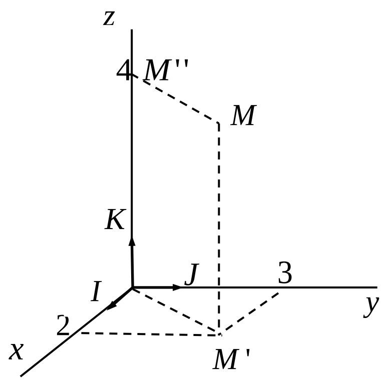
On dit que :

$x = 2$ est l'abscisse de M ;

$y = 3$ est l'ordonnée de M ;

$z = 4$ est la cote de M .

- Dresser $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et placer dans ce repère les ponts $M(1;1;1)$, $N(1;2;0)$ et $P(0;0;3)$.

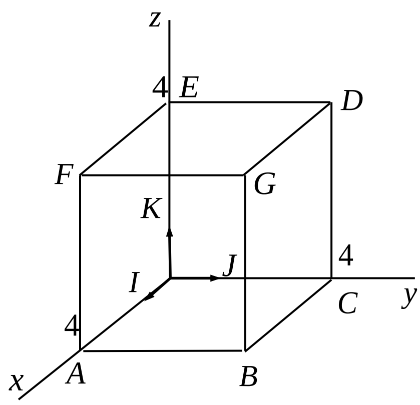


Activité 2 ***dans un cube***

$OABCDEFG$ est un cube, $OA = 4$.

On choisit le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

1. Quelles sont les coordonnées des huit sommets du cube ?
2. Quelles sont les coordonnées du centre du carré $OABC$?
3. Quelles sont les coordonnées du centre du cube ?
4. Où sont situés le point dont la cote z est égale à zéro ?
5. Où sont situés les points dont l'abscisse x est égale à 2 ?
6. Où sont situés les points dont l'ordonnée y est égale à 6 ?



Cours

1. Vecteurs de l'espace

La notion de vecteurs vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace.

1) Par analogie avec ce qui a été fait en géométrie plane, à tout couple (A, B) de points de l'espace, on associe un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Lorsque $A \neq B$,

- la direction de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB),

- le sens de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B,

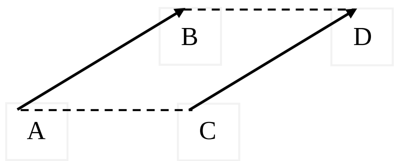
- la longueur ou norme de $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB. La norme de $\overrightarrow{AB}$ st note $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; alors $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

- Lorsque $A = B$, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, note $\vec{0}$.

On désigne des vecteurs par une seule lettre, surmontée d'une flèche, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, …

2) Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point A et un seul tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

3) Deux vecteurs sont égaux :
- lorsqu'ils sont nuls tous les deux, ou,
- lorsqu'ils sont non nuls, ils ont même direction, même sens, même longueur.



Lorsque les quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à : $ABCD$ est un parallélogramme.

4) Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

5) . Dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut a dire qu'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
. A, B, C étant trois points distincts, dire que A, B, C son alignes, équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

2. Repères et coordonnées

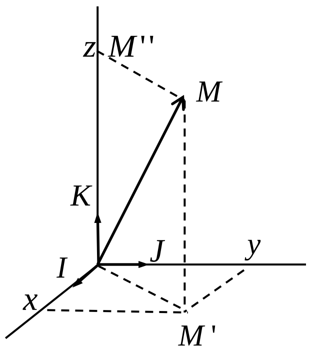
1) Repères

Choisir un repère de l'espace, c'est choisir un point O, appelé origine du repère, et un triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires.

On note alors $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ce repère.

2) Coordonnées d'un point, d'un vecteur

- Coordonnées d'un point



La parallèle menée par M à la droite (OK) coupe le plan (OIJ) en M'.

La parallèle menée par M à la droite (OM') coupe la droite (OK) en M''.

Le quadrilatère $OM'MM''$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$.

Notons $(x; y)$ les cordonnées de M' dans le plan de repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$; ainsi $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{OM''}$ et $\vec{k}$ sot colinéaires, donc il existe un nombre z tel que $\overrightarrow{OM''} = z\vec{k}$.

D'où : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On dit que $(x;y;z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, ou encore que $(x;y;z)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note alors $M(x;y;z)$ et l'on dit que x est l'abscisse de M, y l'ordonnée de M, z la cote de M, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

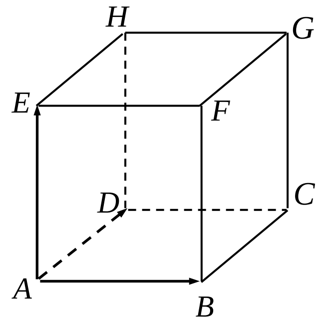
Théorème

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Exemple 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube. Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, par exemple, ne sont pas coplanaires et forme une base. On peut alors considérer le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



Dans ce repère, les huit sommets du cube ont pour coordonnées :

$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$,
$C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, par exemple, sont les coordonnées de F.

- Coordonnées d'un vecteur

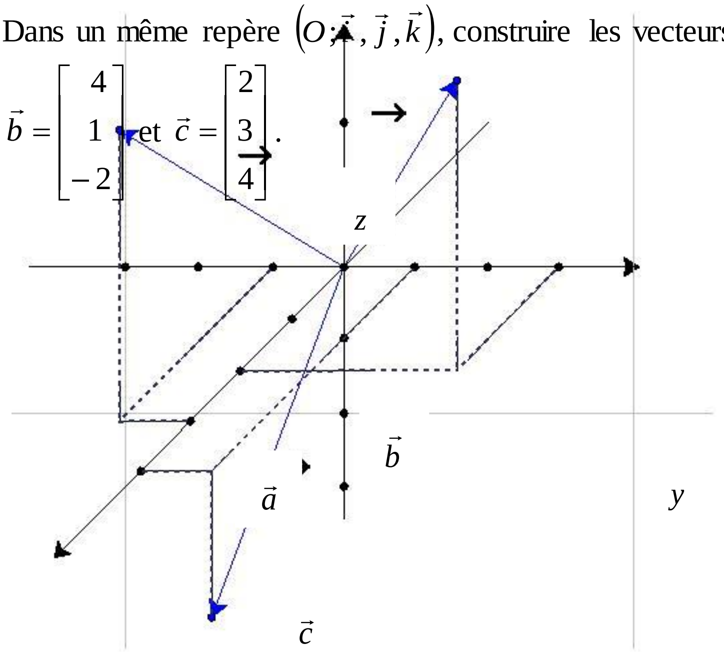
Définition

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace. Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ signifie que le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on le note $\overrightarrow{OM} = \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Exemple : Dans un même repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, construire les vecteurs :

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solution :



x

3. Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane concernent les coordonnées de points et de vecteurs s'étendent à l'espace par adjonction d'une troisième coordonnée.

Dans un repère donné :

- Le vecteur nul note $\vec{0}$: $\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

- Soit deux vecteurs $\vec{u}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ et $\vec{u}'=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$

  - Le vecteur opposé de $\vec{u}$ note $-\vec{u}$: $-\vec{u}=-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\-y\\-z\end{bmatrix}$
  - pour tout nombre k, $k\vec{u}=k\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\\kz\end{bmatrix}$
  - $\vec{u}=\vec{u}'$ équivaut à $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$
  - $\vec{u}+\vec{u}'=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{bmatrix}$
  - $\vec{u}-\vec{u}'=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-x'\\y-y'\\z-z'\end{bmatrix}$

- Soit deux points $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$

  - $\overrightarrow{MM'}=\begin{bmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{bmatrix}$

Exemple 1 : Dans un même repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$.

Déterminer les vecteurs $-\vec{a}$, $2\vec{b}$, $\vec{a}+3\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$.

Solution :

$$-\vec{a}=-\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix},\qquad 2\vec{b}=2\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\8\end{bmatrix}$$

$$\vec{a}+3\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\9\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3\\1+9\\3+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\10\\15\end{bmatrix}$$

$$2\vec{a}-\vec{b}=2\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-1\\2-3\\6-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Exemple 2 : Dans un même repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $P(2;-3;1)$ et $Q(0;4;-2)$.

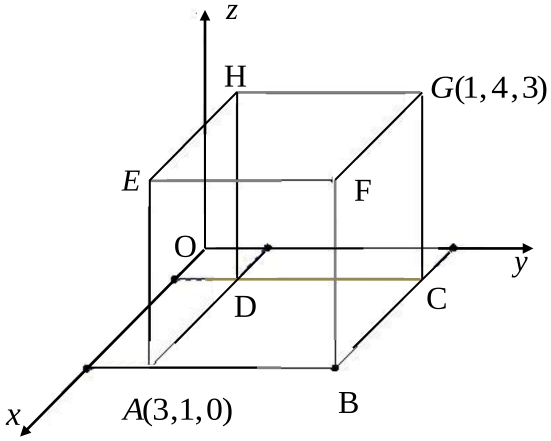
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$.

Solution :

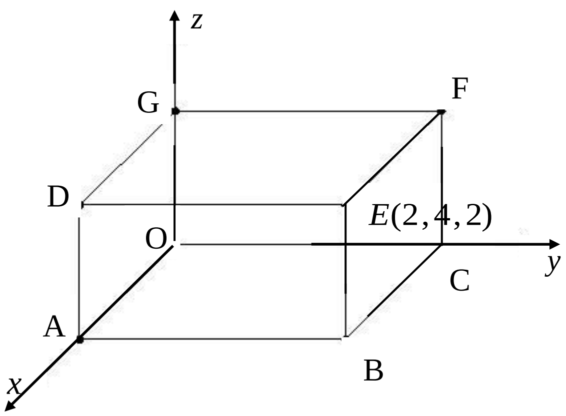
On a : $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}x_P-x_Q\\y_P-y_Q\\z_P-z_Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-2\\4+3\\-2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\7\\-3\end{bmatrix}$

Exercices

1. Sur la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un cube. Quelles sont les coordonnées des six autres sommets de ce cube.



2. Sur la figure ci-dessous, $OABCDEFG$ est un parallélépipède. Quelles sont les coordonnées des sept autres sommets de ce parallélépipède ?



3. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, placer les points $A(1;2;0)$, $B(-1;2;1)$, $C(-1;3;2)$ et $D(-2;-1;-1)$.
4. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $P(1;-2;2)$, $Q(2;1;4)$, $M(0;1;2)$, $N(2;1;4)$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}$. Écrire les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MN}$ sous forme $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
5. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NM}$ tels que :
   a. $M(-1;2;1)$, $N(2;-2;4)$
   b. $M(4;1;7)$, $N(-2;2;4)$
   c. $M(5;7;9)$, $N(8;6;4)$
   d. $M(0;8;9)$, $N(3;7;3)$
6. Calculer $x+y+z$ tel que $\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}=x(\vec{i}+\vec{j})+y(\vec{j}-\vec{i})+z(2\vec{k}-\vec{j})$.
7. Soit deux vecteurs $\vec{a}=\begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$. Calculer :
   a. $\vec{a}+3\vec{b}$, $5\vec{a}-\vec{b}$, $4\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$
   b. Les vecteurs opposés des vecteurs $5\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{a}-2\vec{b}$.
8. On considère les points $R(-2;-1;2)$, $S(0;-5;6)$. Déterminer un vecteur de trois unités et de sens contraire du vecteur $\overrightarrow{RS}$.
9. Indiquer, parmi les vecteurs suivants, ceux qui sont colinéaires ?

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \vec{b}=\begin{bmatrix}0\\-3\\-2\end{bmatrix},\quad \vec{c}=\begin{bmatrix}3\\-6\\-3\end{bmatrix},\quad \vec{d}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \vec{e}=\begin{bmatrix}0\\-3\\2\end{bmatrix},\quad \vec{f}=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

4. Norme d'un vecteur, distance de deux points

Théorème

Dans un repère orthonormé,

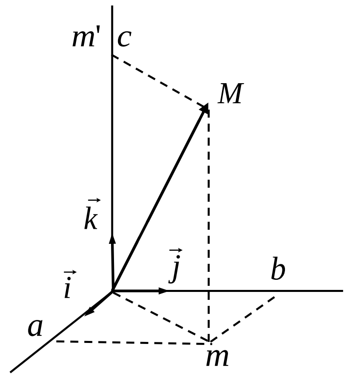
1) Si un vecteur $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, alors la norme de $\vec{u}$ est : $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
2) Si les points $M(x;y;z)$ et $M'(x';y';z')$, alors la distance de MM' est :

$$MM'=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

Démonstration :

1) Notons $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère orthonormé considéré et M le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Alors $\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et $|\vec{u}| = OM$.



Puisque le repère est orthogonal, le triangle OmM est rectangle en m.
Donc $OM^2 = Om^2 + mM^2$.
Or $Om^2 = a^2 + b^2$ et $mM^2 = Om'^2 = c^2$;
donc $OM^2 = a^2 + b^2 + c^2$, c'est-à-dire
$|\vec{u}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ donc $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2) $MM'^2 = \left|\overrightarrow{MM'}\right|^2$.

Or le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{bmatrix}$. Alors, d'après la partie 1 du théorème,

$MM'^2 = \left|\overrightarrow{MM'}\right|^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ donc $MM' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$.

Exemple : On considère le vecteur $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ et les points $A(1;3;0)$, $S(2;-1;1)$.

Calculer la norme du vecteur $\vec{a}$ et la distance AB .
Solution :

- La norme du vecteur $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{15}$
- la distance AB : $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

5. Vecteur unitaire

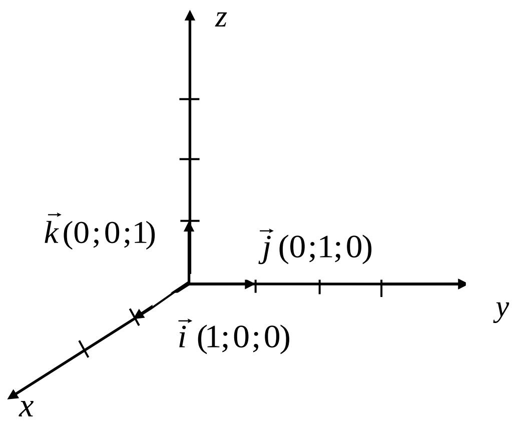
Définition

- Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.
  Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|\vec{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $|\vec{j}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$



- Soit le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\vec{u}$ peut s'écrire sous forme :

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=a\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

- Le vecteur non nul est unitaire et de même direction que le vecteur $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ est le vecteur : $\vec{u}'=\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$.

Exemple : Soit les points $A(2;0;-1)$ *et* $(3;-1;1)$. Déterminer un vecteur unitaire de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Solution :

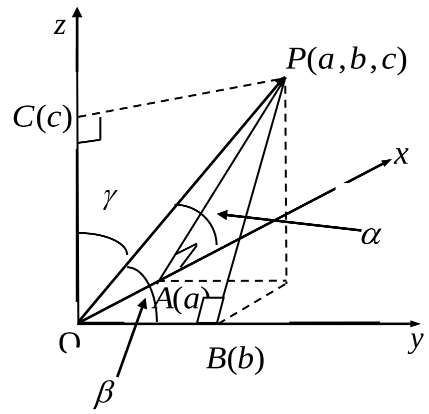
On a : $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-2\\-1-0\\1-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\sqrt{(3-2)^2+(-1-0)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

Si on désigne le vecteur unitaire de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\vec{u}$, alors on obtient :

$\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$. On écrit aussi sous forme : $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{j}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$.

6. Cosinus directeur d'un vecteur



Soit un vecteur $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ et les angles $\alpha,\ \beta,\gamma$ tels que $\alpha=\left(\overrightarrow{OP},Oy\right)$, $\beta=\left(\overrightarrow{OP},Ox\right)$ et $\gamma=\left(\overrightarrow{OP},Oz\right)$.

- Le triangle OPA est rectangle en A, on a : $\cos\alpha=\dfrac{OA}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{a}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$

- Le triangle OPB est rectangle en B, on a : $\cos\alpha=\dfrac{OB}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{b}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$

- Le triangle OPC est rectangle en C, on a : $\cos\gamma=\dfrac{OC}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{c}{\left|\overrightarrow{OM}\right|}$

Les angles $\alpha,\ \beta,\gamma$ sont appelés angles directeurs de $\overrightarrow{OP}$ par rapport à l'axe (Ox), (Oy) et (Oz).

Les nombres $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ sont appelés cosinus directeurs de $\overrightarrow{OP}$ par rapport à l'axe (Ox), (Oy) et (Oz).

Définition

Les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ tel que $|\vec{u}| \neq 0$ par rapport à l'axe $(Ox),(Oy)$ et (Oz) sont les nombres respectifs $\frac{a}{|\vec{u}|}, \frac{b}{|\vec{u}|}, \frac{c}{|\vec{u}|}$.

Exemple 1 : Trouver les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solution :

On a $|\vec{u}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14} \neq 0$, donc les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}$ sont les nombres : $\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Exemple 2 : Trouver les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que $M(1,3,5)$ et $N(3,4,7)$.

Solution :

On a $\overrightarrow{MN}=\begin{bmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 7-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3 \neq 0$, donc les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont les nombres : $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Propriété

- Deux vecteurs sont colinéaires et de même sens lorsqu'ils ont mêmes cosinus directeurs.
- Deux vecteurs sont colinéaires et de sens contraires lorsque leurs cosinus directeurs sont opposés.

Exemple 3 : Étudier la colinéarité des vecteurs suivants.

Les vecteurs $\vec{u}=\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b}$ d'origine $(1,2,3)$ et d'extrémité $(2,-3,5)$ et $\vec{c}$ d'origine O et d'extrémité $(-3,15,-6)$.

Solution :

- On a $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-10)^2+4^2}=\sqrt{4+100+16}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$,

donc les cosinus directeurs du vecteur $\vec{u}$ sont les nombres :

$\frac{2}{2\sqrt{30}}, \frac{-10}{2\sqrt{30}}, \frac{4}{2\sqrt{30}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$.

- On a $\vec{b}=\begin{bmatrix} 2-1 \\ -3-2 \\ 5-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-5)^2+2^2}=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}$,

donc les cosinus directeurs du vecteur $\vec{b}$ sont les nombres : $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$.

- On a $\vec{c}=\begin{bmatrix} -3-0 \\ 15-0 \\ -6-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -6 \end{bmatrix}$ et $|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+15^2+(-6)^2}=\sqrt{9+225+36}=\sqrt{270}=3\sqrt{30}$,

donc les cosinus directeurs du vecteur $\vec{c}$ sont les nombres :

$\frac{-3}{3\sqrt{30}}, \frac{15}{3\sqrt{30}}, \frac{-6}{3\sqrt{30}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}$.

On constate que : les vecteurs $\vec{u}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires :

. $\vec{u}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires et de même sens

. $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Exercices

1. Calculer la norme de chacun des vecteurs suivants.

   $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ tel que $A(3;4;1)$, $B(1;-1;6)$.

2. Dans un repère $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $P(1;-3;6)$, $Q(3;-2;1)$.

   Calculer la distance PQ.

3. Quelle est la nature du triangle de sommets $A(1;2;1)$, $B(-3;7;9)$ et $C(11;4;2)$.

4. Résoudre l'équation : $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. Déterminer le vecteur unitaire de même direction que le vecteur :

   $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{QR}$ tel que $Q(1;5;8)$, $R(0;-3;1)$.

6. Déterminer le vecteur de deux unités et de même direction que le vecteur :

   $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{QR}$ tel que $Q(1;5;8)$, $R(0;-3;1)$.

7. Calculer les cosinus directeurs de chacun des vecteurs suivants.
   a. Vecteur d'origine $A(2,5,3)$ et d'extrémité $B(3,5,-1)$
   b. Vecteur d'origine $M(-1,4,-2)$ et d'extrémité $N(2,-4,7)$
   c. Vecteur d'origine $S(-3,1,0)$ et d'extrémité $T(4,2,8)$

8. Étudier la colinéarité des vecteurs suivants.

   Les vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{PQ}$ avec $P(1,4,3)$ et $Q(-2,0,1)$, $\overrightarrow{OR}$ $R(5,0,2)$.

7. Produit scalaire

Définition

Le produit de deux vecteurs non nuls est un scalaire (un nombre)

Théorème

Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et calcule ainsi :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Exemple : Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2(-3) + (-1)4 + 5\cdot 6 = -6 - 4 + 30 = 20$$

Propriétés

1. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et α un scalaire non nul.
   1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
   2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
   3) $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$
   4) $\vec{0}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$
   5) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$
   6) $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$
   7) $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$
2. Lorsque θ est l'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $0 \le \theta \le 180^\circ$, on a :
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$
3. Lorsque $\vec{u}$, $\vec{v} \neq 0$, on a :
   1) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = 0$
   2) $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \pm|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Démonstration

1. 1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

   Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, on a :

   . $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

   . $\vec{v}\cdot\vec{u} = x'x + y'y + z'z$

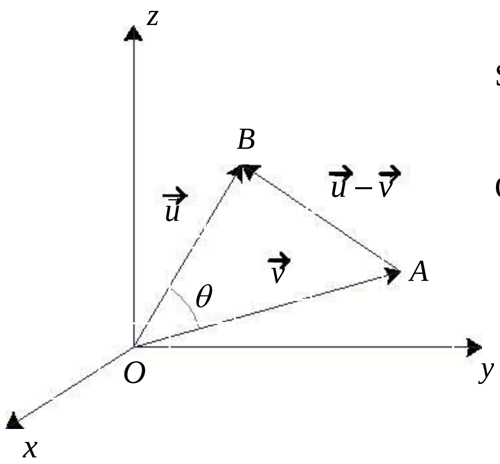
   Puisque la multiplication est commutative on a donc :
   $xx' + yy' + zz' = x'x + y'y + z'z$ cela montre $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

   5) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$

   Soit $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ on a :

   $$\vec{u}\cdot\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = |\vec{u}|^2$$

2. Lorsque θ est l'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $0 \le \theta \le 180^\circ$, on a :
   $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$.



Soit $\vec{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

On suppose $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}-\vec{v}=\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{bmatrix}$

D'après le théorème de cosinus, on a :

$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\theta$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2-2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\theta$

$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)-2|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\theta\ldots\ldots(1)$

$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)-2(xx'+yy'+zz')\ldots\ldots(2)$

(1)=(2), on a donc :

$xx'+yy'+zz'=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\theta$ ou $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cos\theta$

3. Lorsque $\vec{u},\vec{v}\neq 0$, $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

   Puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ et $\vec{u},\vec{v}\neq 0$

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\cos\theta=0$ donc $\theta=90^\circ$ c'est-à-dire $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux $(\vec{u}\perp\vec{v})$.

   Exemple 1 : Soit $\vec{u}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Solution :

   On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

   Donc $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2).1+1.3+2.(-1)=-1$

   $|\vec{u}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$

   On obtient donc $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{-1}{3\sqrt{11}}$

   Exemple 2 : Soit les points $A(4,9,1)$, $B(-2,6,3)$, $C(6,3,-2)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   Solution :

   ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

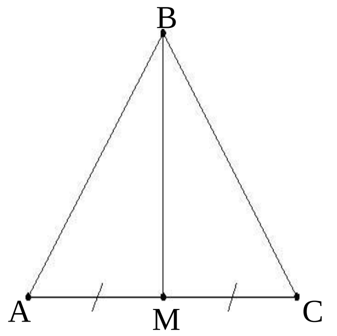
$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-2-4\\6-9\\3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-3\\2\end{bmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}6-4\\3-9\\-2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-6\\-3\end{bmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-6\\-3\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-6\\-3\end{bmatrix}=(-6)\cdot 2+(-3)\cdot(-6)+2\cdot(-3)=-12+18-6=0$

Donc le triangle ABC est rectangle en A.

Exemple 3 : ABC est un triangle isocèle en B $(AB=BC)$. Montrer que la médiane BM est perpendiculaire à la base AC.

Solution :



Pour montrer que BM et AC sont perpendiculaires, il faut montrer que $\overrightarrow{MB}$ *et* $\overrightarrow{MC}$ sont orthogonaux c'est-à-dire $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

On suppose :

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ puisque $AB=AC$ donc $|\vec{u}|=|\vec{v}|$

On a : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\vec{v}$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}-\vec{v}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})$, on a donc :

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v})\cdot\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{4}(\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v})$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{4}(\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{4}\left(|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2\right)=0$, on obtient donc BM et AC sont Perpendiculaires.

Exercices

1. Pour chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
   a. $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{k}$
   b. $\vec{u}=-\vec{i}-\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$
2. Calculer la mesure de l'angle entre deux vecteurs.
   a. $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$
   b. $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$
3. Soit $\vec{u}=\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{bmatrix}6\\-3\\0\end{bmatrix}$. Calculer le produit scalaire de chacun des cas suivants.
   a. $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ b. $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}+\vec{v})$

c. $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ d. $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})$

4. Dire si les vecteurs suivants sont orthogonaux.

a. $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ tels que $|\vec{u}| = |\vec{w}|$ et $|\vec{u}-\vec{v}| = |\vec{v}+\vec{w}|$. Quelle est la mesure entre $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sachant que l’angle entre $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ mesure $\frac{\pi}{5}$?