Chapitre 8 : Primitives

Leçon 19 : Primitives d'une fonction continue

1. Généralités

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\Re$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I.

Exemple 1 : la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ admet sur $I = \Re$ la primitive

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \text{ car } F'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3\right)' = \frac{3}{6}x^2 = \frac{1}{2}x^2 = f(x).$$

Exemple 2 : la fonction $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 1$ admet sur $I = \Re$ la primitive $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + x$

$$\text{car } F'(x) = \left(\frac{5}{4}x^4 - x^3 + x\right)' = \frac{5}{4} \cdot 4x^3 - 3x^2 + 1 = 5x^3 - 3x^2 + 1 = f(x).$$

Exemple 3 : la fonction $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ admet sur $I = [0\,;+\infty[$ la primitive $F(x) = x\sqrt{x}$ car

$$F'(x) = \left(x\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} = f(x).$$

Exemple 4 : la fonction $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ admet sur $I = \Re$ la primitive

$$F(x) = x\sqrt[3]{x} \quad \text{car } F'(x) = \left(x\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = f(x).$$

2. Familles des primitives d'une fonction

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\Re$. Si F est une fonction primitive de f sur I, alors une autre primitive de f est de la forme $F(x)+c$, où c est une constante réelle quelconque.

Exemple : la fonction $f(x)=x^3$ admet sur I de $\Re$ les primitives différentes d'une constante par exemple :

$F(x)=\frac{1}{4}x^4$; $F(x)=\frac{1}{4}x^4+5$; $F(x)=\frac{1}{4}x^4-10$ etc…

Car . $F'(x)=\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=\frac{4}{4}x^3=x^3=f(x)$

. $F'(x)=\left(\frac{1}{4}x^4+5\right)'=\frac{4}{4}x^3+0=x^3=f(x)$

. $F'(x)=\left(\frac{1}{4}x^4-10\right)'=\frac{4}{4}x^3+0=x^3=f(x)$

Toutes les courbes représentatives des fonctions primitives se déduisent de C_F par les translations de vecteurs $k\vec{j}$ (k réel).

3. Primitive prenant une valeur donnée en x_0

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\Re$.

Étant donne un réel x_0 de I et un réel quelconque y_0, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0)=y_0$.

Exemple : Trouver la primitive $F(x)$ de $f(x)=x^2+2x+3$ sur $I=\Re$ telle que : $F(x_0)=y_0$ avec $x_0=1$ et $y_0=0$.

Solution

$F(x)$ est une primitive de $f(x)$, donc elle est de la forme

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+c$.

Pour $x_0=1$ et $y_0=0$, on obtient : $F(1)=\frac{1}{3}+1+3+c=0$

On déduit que $c=-4-\frac{1}{3}=-\frac{13}{3}$

La primitive cherchée est définie sur $I=\Re$ par

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-\frac{13}{3}$.

4. Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I.

La fonction définie sur I par $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est **la primitive** de f sur I qui s'annule en a.

On écrit simplement $\int f(x)dx=F(x)+c$, où c est une constante réelle quelconque.

Exemple 1: a. $\int x^6\,dx=\frac{x^7}{7}+c$

b. $\int x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-1}+c=-\frac{1}{x}+c$

c. $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+c$

Formule fondamentale

Soit deux réels k et c, on a :

1) $\int k\,dx=k\,x+c$

2) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $n\neq-1$

Exemple 2 : a. $\int 5dx=5x+c$

b. $\int-\frac{3}{2}dx=-\frac{3}{2}x+c$

c. $\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+c$

d. $\int x^{\frac{5}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{8}{3}}+c=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}+c$

e. $\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx=\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{\frac{1}{3}}+c=3x^{\frac{1}{3}}+c$

Propriété

Soit k un réel, on a :

1) $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)\,dx$

2) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Exemple 3 : a. $\int 4x^2dx = 4\int x^2dx = 4\times\frac{x^3}{3}+c$

b. $\int (x^3-x^4)dx = \int x^3dx - \int x^4dx = \frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+c$

c. $\int\left(x^2+\frac{1}{x^5}+3\sqrt{x}-2\right)dx = \int x^2dx + \int\frac{1}{x^5}dx + 3\int\sqrt{x}dx - 2\int dx$

$= \int x^2dx + \int x^{-5}dx + 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int dx$

$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^{-4}}{-4}+3\times\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}-2x+c$

$= \frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x^4}+2x^{\frac{3}{2}}-2x+c$

d. $\int\frac{t^2-2t^4}{t^4}dt = \int (t^{-2}-2)dt = \frac{t^{-2+1}}{-1}-2t+c = -\frac{1}{t}-2t+c$

- D'après la définition de primitive, on a : $f(x) = \int f'(x)dx$

Exemple 4 : a. si $f'(x) = x^{10}$, alors $f(x) = \int x^{10}\,dx = \frac{x^{11}}{11}+c$

b. si $f'(x) = x^{\frac{2}{3}}$, alors $f(x) = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5}+c$

c. si $f'(x) = x^{-\frac{1}{5}}$, alors $f(x) = \int x^{-\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{\frac{4}{5}}+c = \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}+c$

Exemple 5 : Soit $f'(x) = x^3+4x^2-6$. Déterminer $f(x)$ telle que $f(1)=5$.

Solution

$f'(x) = x^3+4x^2-6 \Rightarrow f(x) = \int (x^3+4x^2-6)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-6x+c$

$f(1)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{4}{3}-6+c=5 \Rightarrow c = 11-\frac{1}{4}-\frac{4}{3} = 11-\frac{19}{12} = \frac{113}{12}$

On obtient donc : $f(x) = \frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-6x+\frac{113}{12}$

Exercices

1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive.

   a. $f(x)=3x^2-1+\frac{1}{x^2}$ sur $\Re$

   b. $f(x)=(x-2)(x^2+2x+3)$ sur $\Re$

   c. $f(x)=\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

   d. $f(x)=\frac{2}{3}(x\sqrt{x}-2)$ sur $]0\,;+\infty[$

2. Trouver la primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

   a. $f(x)=1-x+x^2-x^3$; $I=\Re$; $x_0=1$; $y_0=0$

   b. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; $I=]0\,;+\infty[$; $x_0=1$; $y_0=1$

3. Calculer.

   a. $\int 7dx$ b. $\int x^6dx$ c. $\int 8x^3dx$

   d. $\int (2x+1)dx$ e. $\int (3x^2+2x-5)dx$ f. $\int (s^5-8s^5)ds$

   g. $\int 6x^{\frac{1}{2}}dx$ h. $\int 8x^{-3}dx$ i. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$

   j. $\int \frac{dx}{4x^3}$ k. $\int \frac{du}{2u^5}$ l. $\int \left(3t^2-\frac{2}{t^2}\right)dt$

   m. $\int \left(10x^4-\frac{8}{x^5}-2\right)dx$ n. $\int \left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ p. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx$

   q. $\int \frac{2x^4-x}{x^3}dx$

4. Pour chacun des cas suivants, déterminer $f(x)$.

   a. $f'(x)=200x^4$

   b. $f'(x)=24-6x$

   c. $f'(x)=2x^5-3x^2-1$

   d. $f'(x)=5x^{-2}+2x^{\frac{1}{2}}+1$

   e. $f'(x)=2x-3$ et $f(0)=5$

   f. $f'(x)=6x^2-4x$ et $f(0)=3000$

   g. $f'(x)=\frac{20}{\sqrt{x}}$ et $f(1)=40$

   h. $f''(x)=2x+1$ et $f'(1)=4$, $f(0)=5$

5. Soit $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f'(0)=2$. Calculer $f(0)$, $f'(x)$ et $f(x)$.

6. Soit $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-2$ et $f'(0)=1$. Calculer $f(0)$, $f'(x)$ et $f(x)$.

Leçon 20 : Calcul intégral

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I.

On appelle intégrale de f entre a et b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, le réel

défini par : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

. $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(x)dx$ ».

. Les réels a et b sont appelés les bornes.

Exemples :

1. $\int_0^1 (3-x)dx = \left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(0-\frac{0}{2}\right)=\frac{5}{2}$

2. $\int_{-1}^2 (3x^2-2x)dx = \left(\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^2 = \left(2^3-2^2\right)-\left((-1)^3-(-1)^2\right)=4-(-2)=6$

3. $\int_{-2}^2 (2x-1)dx = \left(\frac{2x^2}{2}-x\right)\Big|_{-2}^2 = \left(2^2-2\right)-\left((-2)^2-(-2)\right)=2-6=-4$

4. $\int_{-1}^2 (x^2-4x)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)^2\right)$

$$=\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=-\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=-3$$

5. Trouver la fonction $f(x)$ telle que $f(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$

   On suppose $\int_0^1 f(t)dt = K$, donc $f(x)=x+\frac{1}{2}K$

   On obtient donc :

   $K=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\left(t+\frac{K}{2}\right)dt=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{Kt}{2}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}+\frac{K}{2}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{0}{2}\right)=\frac{1+K}{2}$

   $K=\frac{1+K}{2}\Rightarrow K=1$. Donc $f(x)=x+\frac{1}{2}$.

2. Propriétés

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Exemple : $\int_5^5 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_5^5 = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Exemples :

a. $\int_{-3}^{1}\left(x^2+3x-4\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4x\right)\right|_{-3}^{1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)-\left(-9+\frac{27}{2}+12\right)$

$$= -\frac{13}{6} - \frac{23}{2} = -\frac{82}{6} = -\frac{41}{3}$$

b. $\int_{1}^{-3}\left(x^2+3x-4\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4x\right)\right|_{1}^{-3} = \left(-9+\frac{27}{2}+12\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)$

$$= \frac{23}{2} + \frac{13}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$$

On obtient donc : $\int_{-3}^{1}\left(x^2+3x-4\right)dx = -\int_{1}^{-3}\left(x^2+3x-4\right)dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $c \in [a\,;b]$ **(relation de Chasles)**

Exemple 1: Montrer que : $\int_{-2}^{2}\left(3x^2-2\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(3x^2-2\right)dx + \int_{0}^{2}\left(3x^2-2\right)dx$

. $\int_{-2}^{2}\left(3x^2-2\right)dx = \left.\left(\frac{3x^3}{3}-2x\right)\right|_{-2}^{2} = (8-4)-(-8+4) = 4+4 = 8 \ldots\ldots(1)$

. $\int_{-2}^{0}\left(3x^2-2\right)dx + \int_{0}^{2}\left(3x^2-2\right)dx = \left.\left(\frac{3x^3}{3}-2x\right)\right|_{-2}^{0} + \left.\left(\frac{3x^3}{3}-2x\right)\right|_{0}^{2}$

$$= (0)-(-8+4)+(8-4)-(0) = 4+4 = 8 \ldots\ldots(2)$$

$(1)=(2)$, on a donc : $\int_{-2}^{2}\left(3x^2-2\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(3x^2-2\right)dx + \int_{0}^{2}\left(3x^2-2\right)dx$

Exemple 2 : Calculer $\int_{-1}^{2}\left|x^2-4x\right|dx$

Solution

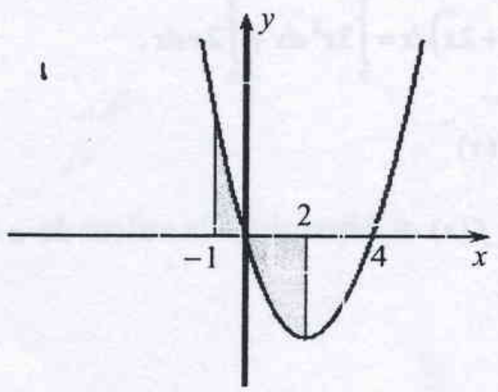
On suppose $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$

La courbe représentative de f est une parabole de sommet $(2\,;-4)$ tournée vers le haut.

$$\int_{-2}^{2}\left|x^2-4x\right|dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-4x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^2-4x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$$=(0)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)+(0)=\frac{7}{3}+\frac{16}{3}=\frac{23}{3}$$



4) $\int_{a}^{b}k\,f(x)\,dx=k\int_{a}^{b}f(x)\,dx$, k est une constante.

Exemple : Montrer que $\int_{2}^{5}3x^2dx=3\int_{2}^{5}x^2dx$

. $\int_{2}^{5}3x^2dx=\frac{3x^3}{3}\Bigg|_{2}^{5}=5^3-2^3=125-8=117$

. $\int_{2}^{5}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{2}^{5}=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=\frac{117}{3}\Rightarrow 3\int_{2}^{5}x^2dx=117$

Donc $\int_{2}^{5}3x^2dx=3\int_{2}^{5}x^2dx$

5) $\int_{a}^{b}k\,dx=k(b-a)$, k est une constante.

Exemple : Calculer $\int_1^6 4\,dx$

On a : $\int_1^6 4\,dx = 4(6-1) = 20$

6) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Exemple : Montrer que : $\int_0^3 (3x^2+2x)dx = \int_0^3 3x^2\,dx + \int_0^3 2x\,dx$

. $\int_0^3 (3x^2+2x)dx = \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = (27+9) - 0 = 36$ ...... (1)

. $\int_0^3 3x^2\,dx + \int_0^3 2x\,dx = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^3 + \frac{2x^2}{2}\Big|_0^3 = 27 + 9 = 36$ ...... (2)

(1) = (2), donc $\int_0^3 (3x^2+2x)dx = \int_0^3 3x^2\,dx + \int_0^3 2x\,dx$.

7) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

Exemple : Calculer $f(x)$ et déterminer la valeur de a $(a > 0)$ tels que

$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 + x - 6$.

Solution :

. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(x^2+x-6) = 2x+1 \Rightarrow f(x) = 2x+1$

. $\int_a^a f(t)\,dt = f(a) - f(a) = 0$, d'autre part $\int_a^a f(t)\,dt = a^2 + a - 6$

Donc $a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -3$ ou $a = 2$

Puisque $a > 0$ donc $a = 2$.

Exercices

1. Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_1^4 3\,dx$ 2) $\int_1^3 3x\,dx$ 3) $\int_{-1}^1 x^2\,dx$

4) $\int_1^5 (7-x)\,dx$ 5) $\int_{-1}^2 (6x^2+1)\,dx$ 6) $\int_1^3 (3x^2+x-2)\,dx$

7) $\int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$ 8) $\int_1^2 6(x+\sqrt{x})\,dx$ 9) $\int_2^5 \frac{2}{7x^2}\,dx$

10) $\int_1^4 \frac{x^3+x^2-1}{x^2}\,dx$ 11) $\int_1^2 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ 12) $\int_1^3 x|x-1|\,dx$

13) $\int_0^3 |x^2-4|\,dx$ 14) $\int_0^3 |x^2-2x|\,dx$

2. Montrer :

1) $\int_1^6 (x^2+7)\,dx = \int_1^3 (x^2+7)\,dx + \int_3^6 (x^2+7)\,dx$

2) $\int_2^2 (8+3x)\,dx = 0$

3) $\int_0^{10} 5\,dx = 50$

4) $\int_2^2 7(8+3x)\,dx = 7\int_2^2 (8+3x)\,dx = 0$

5) $\int_0^7 3x^3\,dx = 3\int_0^7 x^3\,dx$

6) $\int_3^4 \frac{1}{x^2}\,dx = -\int_4^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

7) $\int_{-1}^2 (9+7x-x^2)\,dx = \int_{-1}^2 9\,dx - \int_{-1}^2 7x\,dx - \int_{-1}^2 x^2\,dx$

8) $\int_0^4 (x+\sqrt{x})\,dx = \int_0^4 x\,dx + \int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

9) $\int_1^3 x\,dx = \int_1^4 x\,dx + \int_4^3 x\,dx$

10) $\int_{-1}^2 (x+1)^2\,dx = -\int_2^{-1} (x+1)^2\,dx$

3. Déterminer $f(x)$ et la valeur de a.

1) $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$

2) $f(x)=x+\int_0^1 t\,f(t)dt$

3) $f(x)=2x^2+x\int_0^1 f(t)dt$

4) $\int_a^x f(t)dt = x^3-2x^2+x+4$

4. Soit $f(x)=\min\{x^3+1,3-x\}$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

1) Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe représentative de $y=f(x)$.

2) Calculer le maximum et le minimum de $F(x)$.

5. Soit $I(a)=a+3\int_0^2 x|x-a|dx$.

1) Calculer $I(a)$.

2) Déterminer la valeur de a pour que $I(a)$ admette un minimum.

3) Calculer le minimum de $I(a)$.

Leçon 21 : Utiliser le calcul intégral

1. Calcul d'aire de surface plane

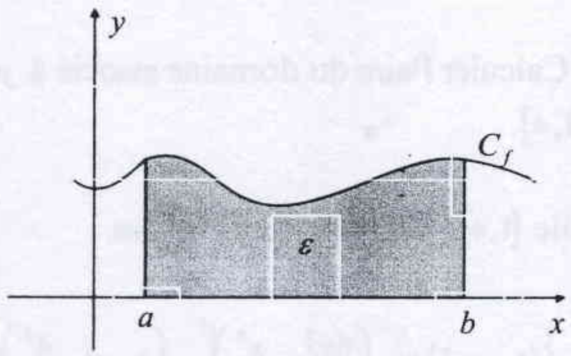
1) L'unité d'aire

Le plan est muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthogonal. L'unité d'aire (en abrégé u.a.) est l'aire du rectangle construit avec O, I et J.

2) Le domaine associé

Le domaine associé à une fonction continue positive f sur $[a,b]$, est le domaine ε limité par C_f, l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.



Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ avec $a \le b$.
L'aire du domaine associé à f sur $[a,b]$, exprimée en unité d'aire, est calculée par $\int_a^b f(x)dx$.

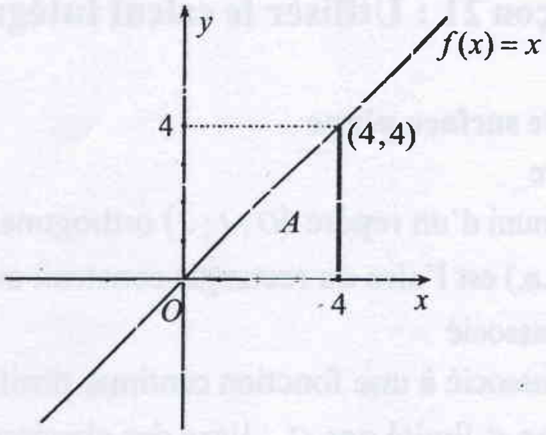
Exemple 1 : Calculer l'aire du domaine associé à $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0,4]$.

Solution

- Le domaine hachuré est un triangle rectangle.

On a donc : $A=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8\ u.a.$

- Par intégrale



On a : $A = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4$

$$= \frac{4^2}{2} - 0 = 8\ u.a.$$

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine associé à $y = 6x - x^2$ sur l'intervalle $[1,4]$.

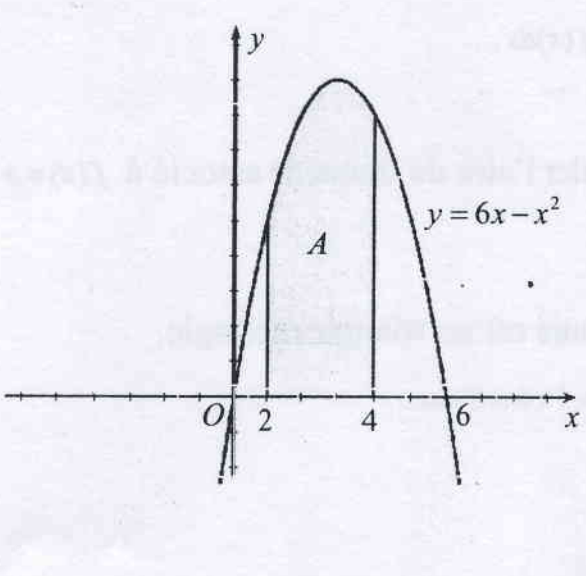
Solution

Sur l'intervalle $[1,4]$, $y = 6x - x^2$ est positive.

On a donc :

$$A = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (6x - x^2)dx = \left.\left(\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^4 = \left(3\times 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(3\times 1^2 - \frac{1^3}{3}\right)$$

$$= \left(48 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{144 - 64 - 8}{3} = \frac{72}{3} = 24\ u.a.$$



Exemple 3 : Calculer l'aire du domaine associé à $f(x)=x^2+1$ sur l'intervalle $[-1,2]$.

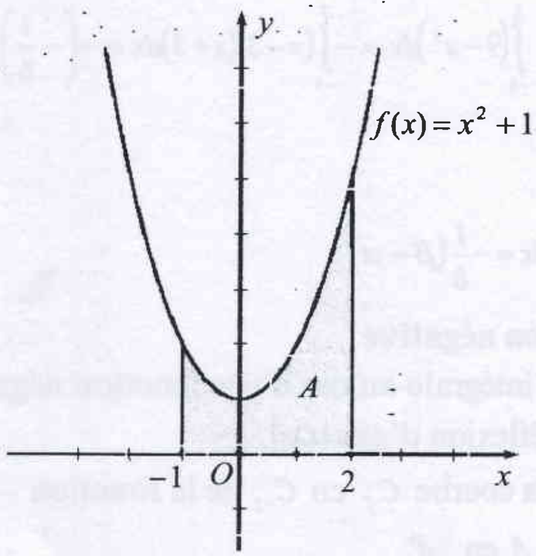
Solution

Sur l'intervalle $[-1,2]$, $f(x)=x^2+1$ est positive.

On a donc :

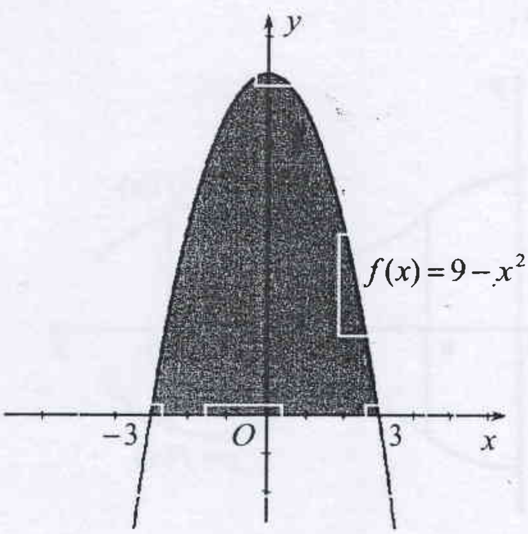
$$A=\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=6\ u.a.$$



Exemple 4 : Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de $f(x)=9-x^2$ et l'axe (Ox).

Solution



On résout l'équation : $f(x)=0 \Leftrightarrow 9-x^2=0$

$9-x^2=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$ ou $x=3$

signifie que la courbe représentative de $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points $x=-3$ et $x=3$.

On a donc

$$A=\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}$$

$$A=\left(27-\frac{27}{3}\right)-\left(-27+\frac{27}{3}\right)=18+18=36\ u.a.$$

On constate que : $\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=-\int_{-3}^{3}(x-3)(x+3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3+3)^3=36$.

Théorème :

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3.$$

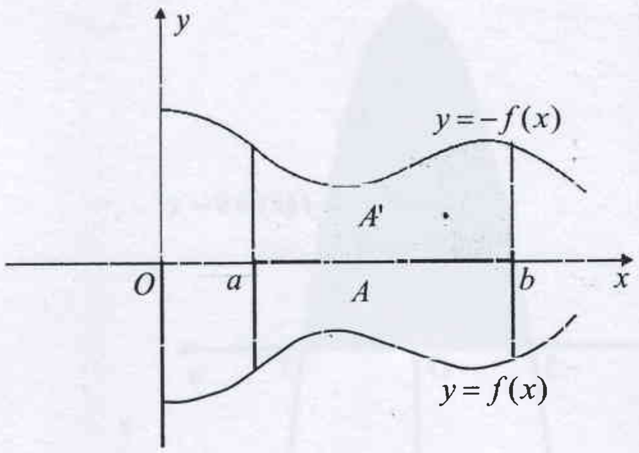
Cas d'une fonction négative

On peut adapter l'intégrale au cas d'une fonction négative sur $[a\,;b]$ grâce à la réflexion d'axe (Ox).

- elle transforme la courbe C_f en C_{-f} de la fonction $-f(x)$, et donc le domaine A en A'.
- elle conserve les aires et donc aire $(A)=$ aire (A') ;

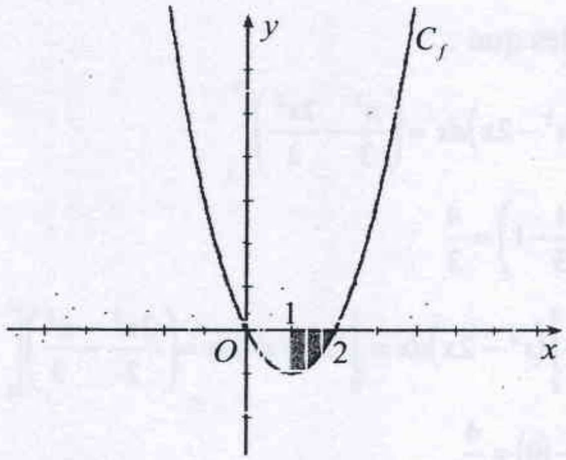
Comme aire $(A')=\int_a^b(-f(x))dx$, l'aire de A est calculée par

aire $(A)=-\int_a^b(f(x))dx$.



Exemple 1 : Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x)=x^2-2x$, l'axe (Ox) sur l'intervalle $[1\,;2]$.

Solution



Le domaine cherché est au-dessous de l'axe (Ox) c'est-à-dire $f(x)<0$. Donc :

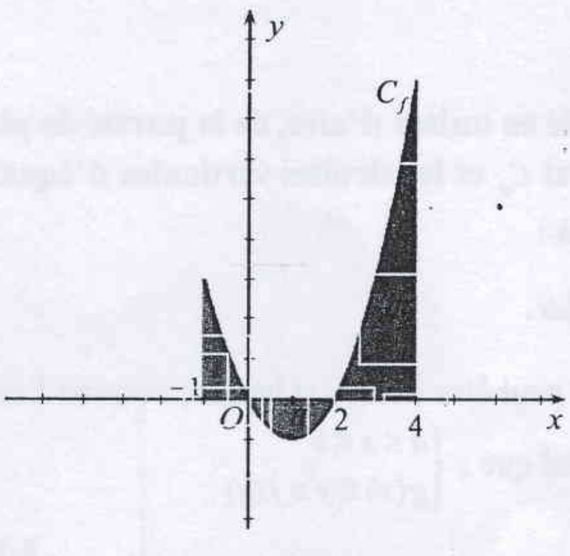
$$A=-\int_1^2 (f(x))dx=-\int_1^2 (x^2-2x)dx$$

$$A=-\int_1^2 (x^2-2x)dx=\int_1^2 (2x-x^2)dx$$

$$A=\int_1^2 (2x-x^2)dx=\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\,u.a.$$

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de $f(x)=x^2-2x$, l'axe (Ox) sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

Solution



En précisant les abscisses des points d'intersection de l'axe (Ox) et la courbe, nous pouvons évaluer l'aire de chacun des domaines A_1, A_2 et A_3.

On obtient donc :

$A = A_1 + A_2 + A_3$ telles que :

. $A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}$

$$A_1 = (0) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

. $A_2 = -\int_{0}^{2} f(x)\,dx = -\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2}$

$$A_1 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{4}{3}$$

. $A_3 = \int_{2}^{4} f(x)\,dx = \int_{2}^{4} (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{2}^{4}$

$$A_3 = \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{16}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

Donc l'aire demandée est $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$ *u.a.*

2. Aire d'une partie de plan limite par deux courbes

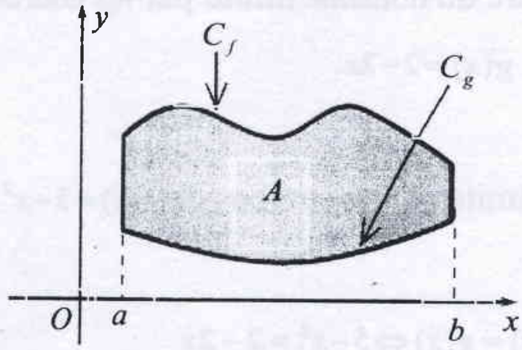
Théorème

Soit deux fonction f et g dérivables sur $[a\,;b]$ telles que, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$. On appelle C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale a :

$$A = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx.$$

- Le domaine A peut être décrit, si besoin, comme l'ensemble des points $M(x\,,y)$ tel que : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$



Exemple 1 : Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ et $g(x)=-x^2+1$ sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

Solution :

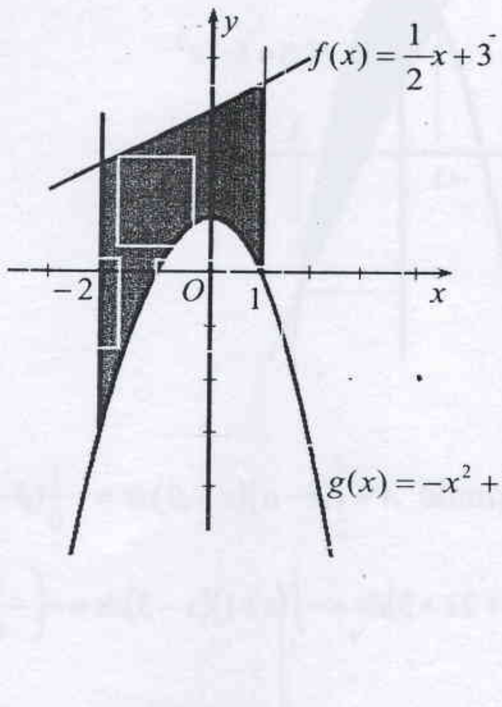
La courbe de $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ est au-dessus de l'axe (Ox) c'est-à-dire $f(x)>g(x)$.

On obtient donc :

$$A=\int_{-2}^{1}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-2}^{1}\left[\left(\frac{1}{2}x+3\right)-\left(-x^2+1\right)\right]dx$$

$$A=\int_{-2}^{1}\left(x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$A=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{4}-4=\right)=\frac{31}{12}+\frac{68}{12}=\frac{99}{12}=\frac{33}{4}\ u.a.$$



Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine limité par les courbes des fonctions $f(x)=x^2-5$ et $g(x)=2-2x$.

Solution

On cherche le domaine limité par les courbes de $f(x)=5-x^2$ et $g(x)=2-2x$.

On résout l'équation $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 5-x^2=2-2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=3$

Ces deux courbes coupent en deux points :

$x=-1$ et $x=3$ et la courbe de $f(x)=5-x^2$

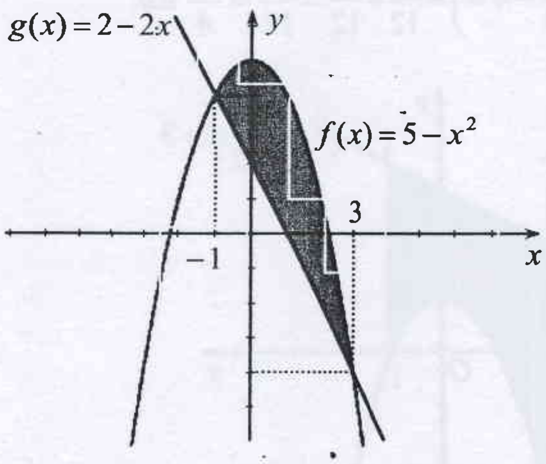
est au-dessus de celle de $g(x)=2-2x$.

On a donc :

$$A=\int_{-1}^{3}[f(x)-g(x)]dx=\int_{-1}^{3}[(5-x^2)-(2-2x)]dx$$

$$A=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$A=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=9+\frac{5}{3}=\frac{32}{3}\ u.a.$$



Remarque

On peut utiliser la formule $A=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

On obtient $A=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3+1)^3=\frac{32}{3}\ u.a.$

Exemple 3 : Calculer l'aire du domaine limité par les courbes des fonctions $f(x) = -x^2 + 3x + 2$ et $g(x) = x - 1$.

Solution

On résout l'équation $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 2 = x - 1$

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Ces deux courbes coupent en deux points $x = -1$ et $x = 3$.

D'après la formule $A = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

On obtient donc :

$$A = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = \int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)dx = \left(-\frac{1}{6}\right)(3+1)^3 = -\frac{32}{3}.$$

Donc $A = \frac{32}{3}$ $u.a.$

Exemple 4 : Calculer l'aire du domaine limité par les courbes des fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + x + 2$.

Solution

On résout l'équation $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = -x^2 + x + 2$

$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$

Ces deux courbes coupent en deux points $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

D'après la formule $A = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

On obtient donc :

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)(x-1)dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)dx = 2\left(-\frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{3} \times \frac{27}{8} = -\frac{9}{8}.$$

Donc $A = \frac{9}{3}$ $u.a.$

Exemple 5 : Soit $C : y = x^2$, L est une droite de coefficient directeur m et passant par

$(2\,;6)$. Déterminer la valeur de m pour que le domaine limité par C et L ait pour aire minimale puis la calculer.

Solution

On a : $L : y = m(x-2) + 6$

On résout l'équation $x^2 = m(x-2) + 6 \Leftrightarrow x^2 - m(x-2) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + 2m - 6 = 0$

On suppose ces deux courbes coupent en deux points $x=\alpha$ et $x=\beta, (\alpha<\beta)$.

$x^2-mx+2m-6=x^2-mx+2(m-3)=0$

Pour que ces deux courbes coupent en deux points, il faut que $\Delta>0$.

$\Delta=m^2-8(m-3)=m^2-8m+24=(m-4)^2-16+24=(m-4)^2+8>0,\ \forall m\in\Re$

Soit $\alpha=\dfrac{m+\sqrt{\Delta}}{2},\ \beta=\dfrac{m-\sqrt{\Delta}}{2}$

Le domaine limité par C et L ait pour aire minimale lorsque $m=4$.

Et l'aire minimale est :

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-)dx=-\frac{1}{6}\left(\frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}-\frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^3=-\frac{1}{6}\left(-\sqrt{\Delta}\right)^3,\ m=4$$

$$A=-\frac{1}{6}\left(-\sqrt{8}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{8}\right)^3=\frac{1}{6}\times2^4\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\ u.a.$$

Exercices

1. Pour chacun des cas, calculer l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses (Ox) sur l'intervalle indiqué.
   1) $y=2x+4, \quad 1\leq x\leq 3$ 2) $y=3x^2, \quad -1\leq x\leq 0$
   3) $y=x^2+2, \quad -1\leq x\leq 0$ 4) $y=4-x^2, \quad -1\leq x\leq 2$
2. Pour chacun des cas, calculer l'aire du domaine limité par la courbe C et l'axe des abscisses (Ox).
   1) $f(x)=6+x-x^2$ 2) $f(x)=x^3-4x^2+3x$
   3) $f(x)=x^3-4x^2+4x$
3. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes des fonctions indiquées.
   1) $f(x)=x^2+2x+3$ et $g(x)=x+5$
   2) $y=x^2+2x+3$ et $y=2x+4$
   3) $y=x^2-4x-10$ et $y=14-2x-x^2$
4. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équations respectives :
   $y=3-x^2+x$ et $y=2x-3, \quad -2\leq x\leq 4$
5. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équations respectives :
   $y=x^2-2x-3$ et $y=3-x, \quad -2\leq x\leq 3$
6. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équations respectives :
   $y=x^2+1$ et $y=2x-2, \quad -1\leq x\leq 2$
7. Soit $S(a)$, l'aire du domaine limité par les courbes d'équations respectives $y=x^2-1$ et $y=ax$.
   Déterminer la valeur de a pour que $S(a)$ soit minimale puis la calculer.
8. Soit $T(a)$, l'aire du domaine limité par les courbes d'équations respectives $y=x^2$ et la droite L de coefficient directeur a et passant par le point $(1\,;2)$.
   Déterminer la valeur de a pour que $T(a)$ soit minimale puis la calculer.

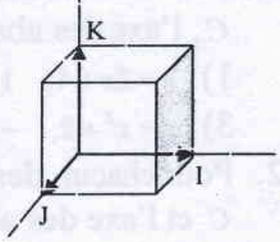
3. Calculs de volumes

a. Unité de volume

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ un repère orthogonal de l'espace.

Soit les points $I(1,0,0)$, $J(0,1,0)$ et $K(0,0,1)$.

On appelle unité de volume, et on note $u.v.$, le volume du pave droit dont les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$ sont trois arêtes.



b. Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'axe.

Théorème

Dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère une parie de plan limitée par une courbe d'équation $y=f(x)$, l'axe (Ox), et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. En tournant autour de l'axe (Ox), cette partie de plan engendre un solide de révolution limité par les plans parallèles à $(O\,;\vec{j}\,,\vec{k})$ de cotes respectives a et b.

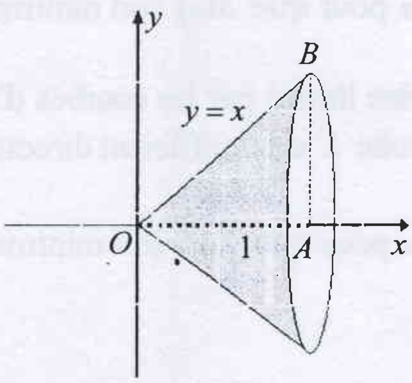
Le volume de ce solide, exprimé en unités de volume, est :

$$\boxed{V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

Exemple 1 : Par rotation autour de (Ox), le triangle rectangle OAB engendre un cône de révolution.

Calculer son volume.

Solution



Ce cône a pour rayon de base $r=1$ et de hauteur $h=1$

On a : $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{\pi}{3}\ u.v.$

Ou $V=\pi\int_0^1[f(x)]^2dx=\pi\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{\pi}{3}\ u.v.$

Exemple 2 : Par rotation autour de (Ox), le cercle de rayon $r=1$ engendre une sphère.
Calculer le volume de cette sphère.
Solution

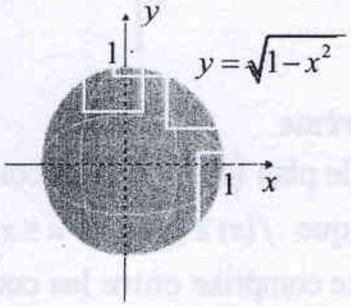
On a : $V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi}{3}\ u.v.$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=$$

Ou

$$V=\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\pi\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}$$

$$V=\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)-\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}\ u.v.$$



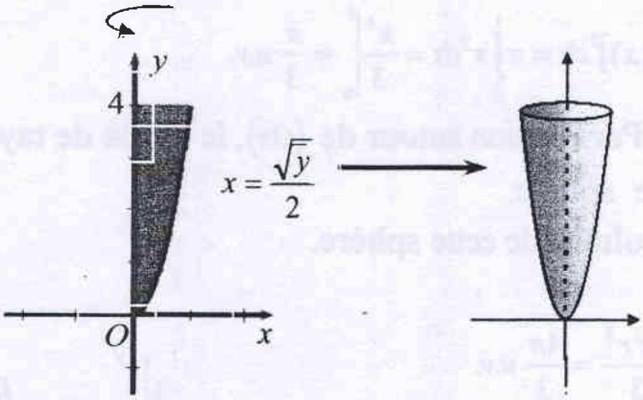
Théorème

Dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère une partie de plan limitée par une courbe d'équation $y=g(y)$, l'axe (Oy), et les droites d'équation $y=c$ et $y=d$. En tournant autour de l'axe (Oy), cette partie de plan engendre un solide de révolution limité par les plans parallèles à $(O\,;\vec{i}\,,\vec{k})$ de cotes respectives c et d.
Le volume de ce solide, exprimé en unités de volume, est :

$$\boxed{V=\pi\int_c^d[g(y)]^2dx}$$

Exemple 1 : Par rotation autour de (Oy), le domaine colorié limité par la courbe d'équation $x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ avec $0\le y\le 4$ engendre un solide de révolution. Calculer son volume.
Solution
Ce volume a pour volume :

$$V=\pi\int_0^4[g(y)]^2dy=\pi\int_0^4\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2dy=\frac{\pi}{4}\int_0^4 ydy=\frac{\pi}{4}\times\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4=\frac{\pi}{4}\times\frac{16}{2}=2\pi\,u.v.$$



Théorème

Dans le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on considère f et g deux fonctions dérivables telles que $f(x)\geq g(x)$ et $a\leq x\leq b$. Par rotation autour d'axe (Ox) la surface comprise entre les courbes f et g et $a\leq x\leq b$ engendre un solide de révolution.

Le volume de ce solide, exprimé en unités de volume, est :

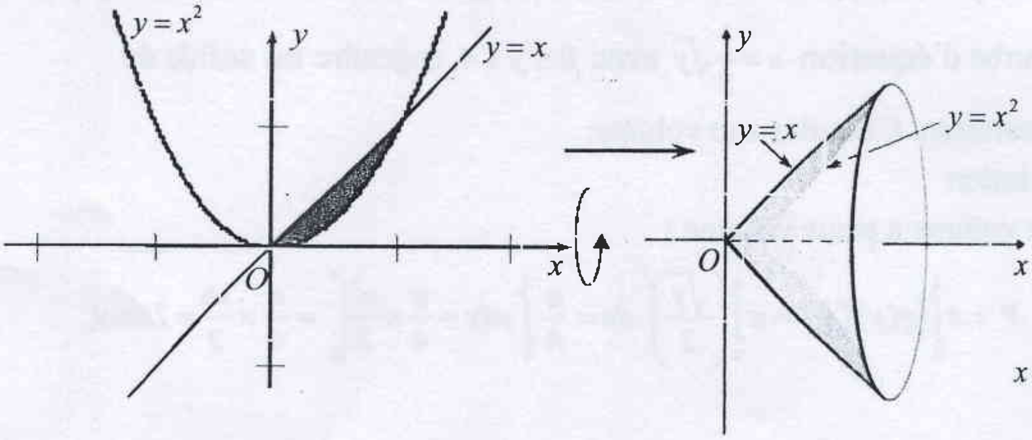
$$\boxed{V=\pi\int_a^b\left\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\right\}dx}$$

Exemple 1 : Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour d'axe (Ox) de la surface comprise entre les courbes d'équations respectives : $y=x$ et $y=x^2$.

Solution

Calculons les points d'intersection de deux courbes d'équations respectives : $y=x$ et $y=x^2$.

$x=x^2\Leftrightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0$ ou $x=1$.



On obtient donc :

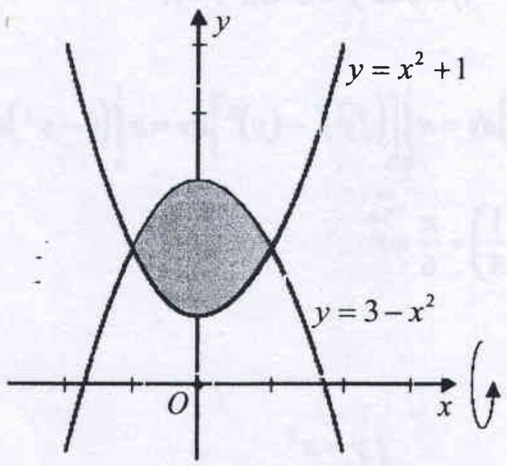
$$V=\pi\int_0^1\left\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\right\}dx=\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}\,u.v.$$

Exemple 2 : Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour d'axe (Ox) de la surface comprise entre les courbes d'équations respectives : $y=x^2+1$ et $y=3-x^2$.

Solution

Calculons les points d'intersection de deux courbes d'équations respectives : $y=x^2+1$ et $y=3-x^2$.

$x^2+1=3-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2=2(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=-1$.



On obtient donc :

$$V=\pi\int_{-1}^1\left\{[f(x)]^2-[g(x)]^2\right\}dx=\pi\int_{-1}^1\left[\left(3-x^2\right)^2-\left(x^2+1\right)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^1\left(9-6x^2+x^4-x^4-2x^2-1\right)dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^1\left(-8x^2+8\right)dx=8\pi\int_{-1}^1\left(-x^2+1\right)dx=8\pi\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^1=8\pi\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]$$

$$V=8\pi\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=8\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{32\pi}{3}\;u.v.$$

Théorème

Dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère f et g deux fonctions dérivables telles que $f(y)\geq g(y)$ et $c\leq x\leq d$. Par rotation autour d'axe (Oy) la surface comprise entre les courbes f et g et $c\leq x\leq d$ engendre un solide de révolution.

Le volume de ce solide, exprimé en unités de volume, est :

$$\boxed{V=\pi\int_c^d\left\{[f(y)]^2-[g(y)]^2\right\}dy}$$

Exemple : Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour d'axe (Oy) de la surface comprise entre les courbes d'équations respectives : $y=x$ et $y=x^2$.

Solution

Calculons les points d'intersection de deux courbes d'équations respectives : $y=x$ et $y=x^2$.

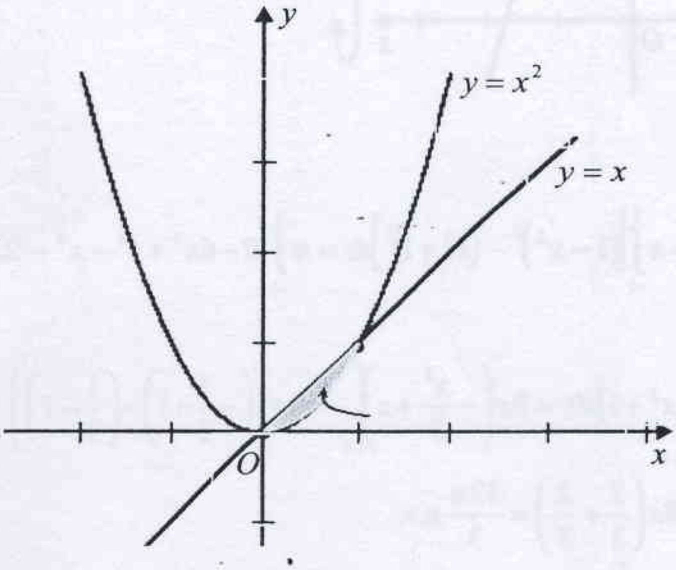
$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$

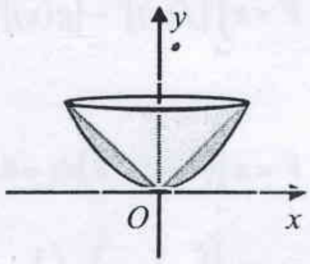
$y=\sqrt{y} \Leftrightarrow y^2=y \Leftrightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow y=0$ ou $1=1$.

On obtient donc :

$$V=\pi\int_0^1\left\{[f(y)]^2-[g(y)]^2\right\}dy=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{y}\right)^2-(y)^2\right]dy=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{6}\ u.v.$$





Exercices

Pour chacun des suivantes, calculer le volume du solide engendré par :

1. $x+y=1,\ x=0,\ y=0$ par rotation d'axe (Ox).
2. $y=x^2,\ x=2,\ y=0$ par rotation d'axe (Ox).
3. $y=x^2-4x,\ y=0$ par rotation d'axe (Ox).
4. $y=x^2+1,\ y=x+3$ par rotation d'axe (Ox).
5. $y=\sqrt{x-1},\ x=2,\ x=5,\ y=0$ par rotation d'axe (Ox).
6. $y=6-x^2,\ y=2$ par rotation d'axe (Oy).
7. $x=y^2-4x,\ x=2y$ par rotation d'axe (Oy).
8. $x=4y-y^2+1,\ x=0$ par rotation d'axe (Oy).
9. $y=x^2+2,\ x=0,\ x=1,\ y=0$ par rotation d'axe (Oy).
10. $y=\sqrt{x-2},\ x=11,\ y=0$ par rotation d'axe (Oy).