Chapitre 7 Angles inscrits dans un cercle

Leçon 24 Angle inscrit dans un cercle et angles au centre

Activités 1

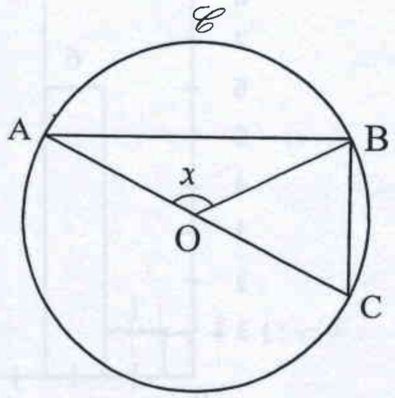
On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et trois points A, B, C de ce cercle.

Cas particulier :

On suppose les points C, O et A alignés.

Reproduire la figure ci-contre et exprimer les mesures des angles $O\hat{A}B$, $O\hat{B}A$, $O\hat{B}C$, $O\hat{C}B$ et $B\hat{O}C$ en fonction de x.

Conclure.

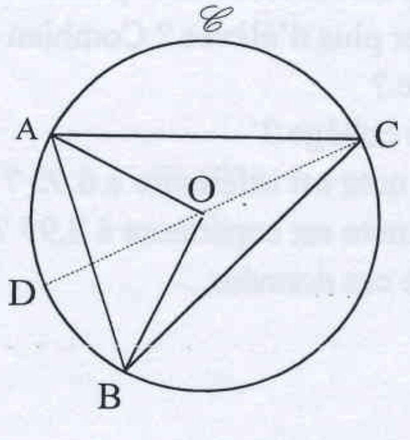


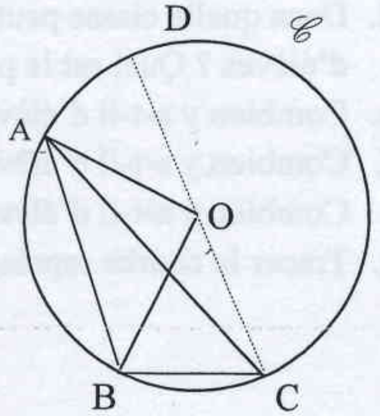
Cas général :

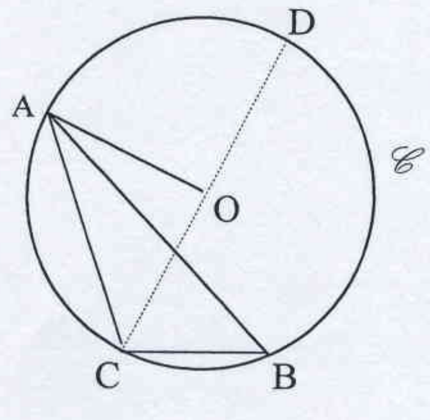
Les points C, O et A ne sont pas alignés.

Tracer le diamètre passant par C et utiliser le résultat précédent pour exprimer la mesure de l'angle $A\hat{C}B$ en fonction de l'angle $A\hat{O}B$.

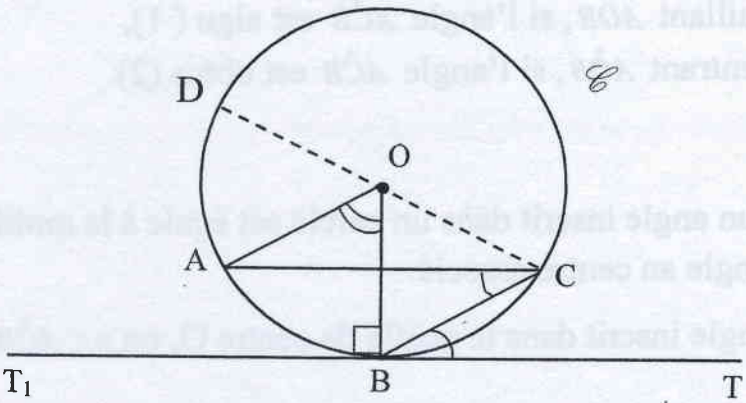
On envisagera les trois cas ci-dessous







Activité 2



Sur la figure ci-dessus, (TT_1) est la tangent au cercle $\mathscr{C}$ en A.
Compléter :

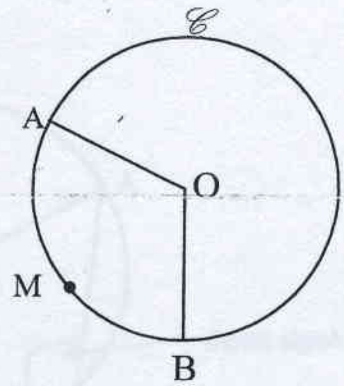
$$\left.\begin{array}{l}(OB)\perp(TT_1)\\(AC)//(TT_1)\end{array}\right\} \Rightarrow AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B\\ AB = BC\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{C}B = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\\ \left.\begin{array}{l}(AC)//(TT_1)\\ (BC) \text{ coupe } (AC) \text{ et } (TT_1)\end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}T = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{B}T = \ldots\ldots$$

Le cours

1. **Arcs de cercle**

Deux points pris sur un cercle $\mathscr{C}$ définissent deux arcs de cercle AB. Pour préciser celui dont on parle on donne un point de cet arc. Par exemple, pour désigner l'arc AB représenté en rouge on dira : l'arc AB qui contient M.



2. **Angle inscrit et angle au centre associé**

Définition :

Si $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, et si A, B et C sont trois points de ce cercle :

- L'angle $A\hat{C}B$ est appelé angle inscrit de sommet C interceptant l'arc AB ne contenant pas C ;

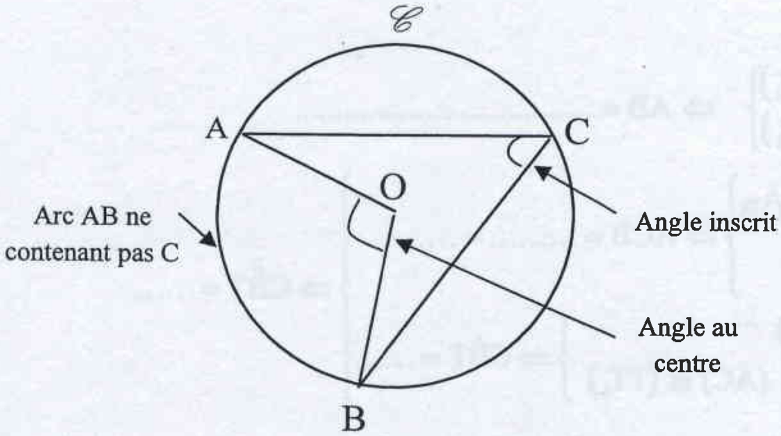
- L'angle au centre associé à l'angle $A\hat{C}B$ est :
  - l'angle saillant $A\hat{O}B$, si l'angle $A\hat{C}B$ est aigu (1),
  - l'angle rentrant $A\hat{O}B$, si l'angle $A\hat{C}B$ est obtus (2).

Théorème :
La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

$A\hat{C}B$ est un angle inscrit dans le cercle de centre O, on a : $A\hat{C}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$

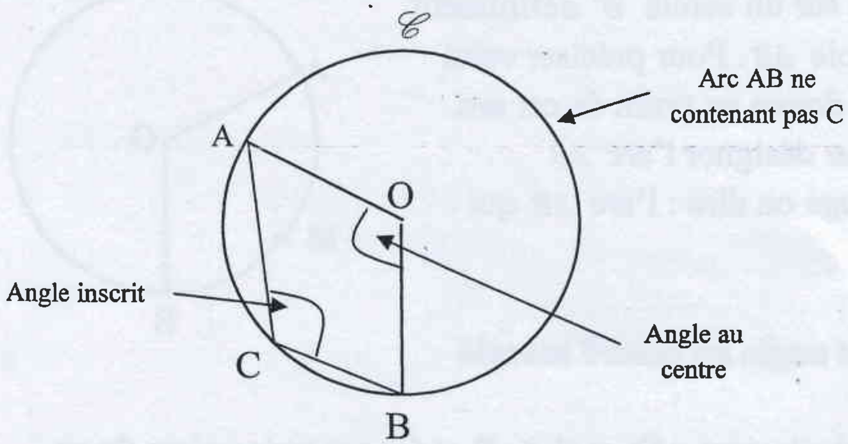
Exemples :

(1) Cas d'un angle $A\hat{C}B$ aigu



$$\boxed{A\hat{C}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B}$$

(2) Cas d'un angle $A\hat{C}B$ obtus



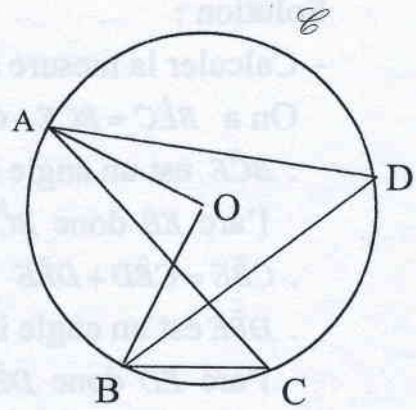
$$\boxed{A\hat{C}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B}$$

3. Angles inscrits interceptant le même arc

Théorème :

Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ces deux angles ont même mesure : la moitié de la mesure de l'angle au centre :

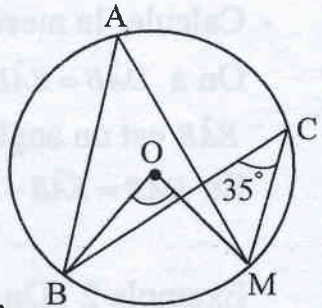
$A\hat{C}B = A\hat{D}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$



Exemple : On considère un cercle de centre O, et trois points A, B, C de ce cercle. M est un point de l'arc BC ne contenant pas A tel que $B\hat{C}M = 35^\circ$.

Calculer la mesure des angles $B\hat{A}M$, $B\hat{O}M$.

Solution :



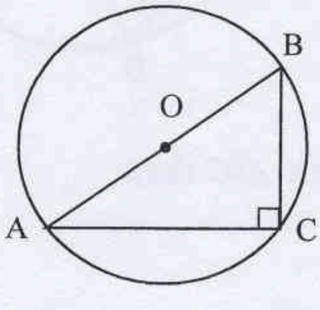
- $B\hat{A}M$ *et* $B\hat{C}M$ sont des angles inscrits interceptant le même arc BM donc ils ont même mesure : $B\hat{A}M = B\hat{C}M = 35^\circ$.
- $B\hat{O}M$ est un angle au centre associé à l'angle inscrit $B\hat{C}M = 35^\circ$ donc $B\hat{O}M = 2 \times B\hat{C}M = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$.

4. Angle droit

- $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Si on sait que C est un point de $\mathscr{C}$ **distinct de A et B, alors on peut dire que** $A\hat{C}B = 90^\circ$.

Si on sait que $A\hat{C}B = 90^\circ$**, alors on peut dire que** C est un point de $\mathscr{C}$**.**



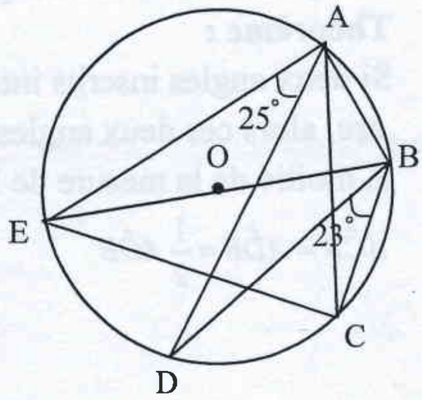
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Exemple 1 : On considère un cercle de centre O, de diamètre $[EB]$, et trois points A, C, D de ce cercle tels que $E\hat{A}D = 25^\circ$ et $D\hat{B}C = 23^\circ$.

Calculer la mesure des angles $B\hat{E}C$, $D\hat{A}B$.

Solution :

- Calculer la mesure de $B\hat{E}C$.



On a $B\hat{E}C = B\hat{C}E - C\hat{B}E$

. $B\hat{C}E$ est un angle inscrit interceptant l'arc EB donc $B\hat{C}E = 90°$.

. $C\hat{B}E = C\hat{B}D + D\hat{B}E$

. $D\hat{B}E$ est un angle inscrit interceptant l'arc ED donc $D\hat{B}E = D\hat{A}E = 25°$

Donc $C\hat{B}E = C\hat{B}D + D\hat{B}E$

$C\hat{B}E = 23° + 25° = 48°$ et $B\hat{E}C = B\hat{C}E - C\hat{B}E$

$B\hat{E}C = 90° - 48° = 42°$

- Calculer la mesure de $D\hat{A}B$

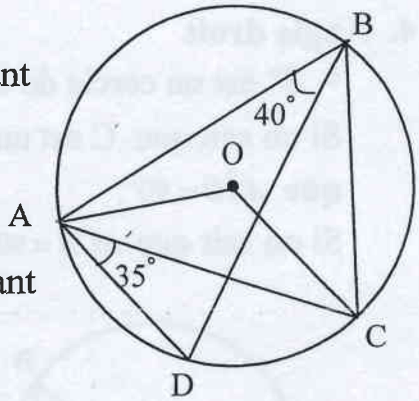
On a $D\hat{A}B = E\hat{A}B - E\hat{A}D$

$E\hat{A}B$ est un angle inscrit interceptant l'arc EB donc $E\hat{A}B = 90°$.

Et $D\hat{A}B = E\hat{A}B - E\hat{A}D = 90° - 25° = 65°$

Exemple 2 : On considère un cercle de centre O tel que $D\hat{A}C = 35°$ et $A\hat{B}D = 40°$. Calculer la mesure des angles $D\hat{B}C$, $A\hat{C}D$ et $A\hat{O}C$.

Solution :



- Calculer $D\hat{B}C$

$D\hat{B}C$ et $D\hat{A}C$ sont des angles inscrits interceptant le même arc DC donc ils ont même mesure :

$D\hat{B}C = D\hat{A}C = 35°$.

- Calculer $A\hat{C}D$

$A\hat{C}D$ et $A\hat{B}D$ sont des angles inscrits interceptant le même arc AD donc ils ont même mesure :

$A\hat{C}D = A\hat{B}D = 40°$.

- Calculer $A\hat{O}C$

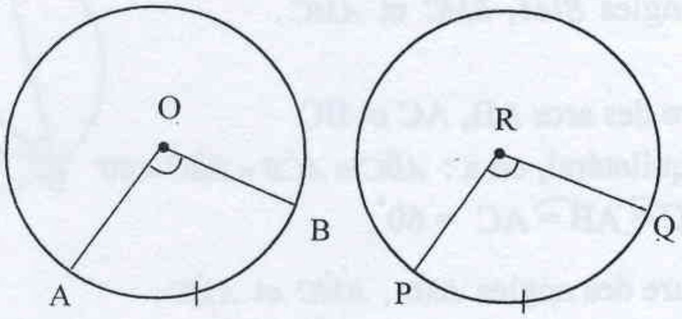
$A\hat{O}C$ est n angle au centre associé à l'angle inscrit $A\hat{B}C$ donc $A\hat{O}C = 2 \times A\hat{B}C$.

Puisque $A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C = 40° + 35° = 75°$.

Donc $A\hat{O}C = 2 \times A\hat{B}C = 2 \times 75° = 150°$.

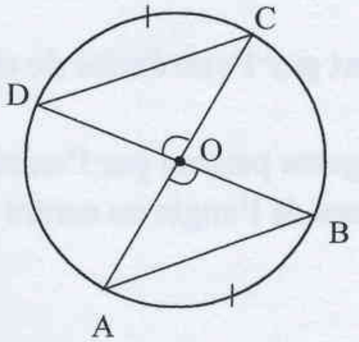
5. Arc de et angle au centre associé

Dans les cercles identiques ou dans un même cercle, lorsque deux angles au centre ont même mesure alors les arcs qui interceptent ont même mesure et réciproquement.



Dans ces deux cercles identiques ci-dessus :

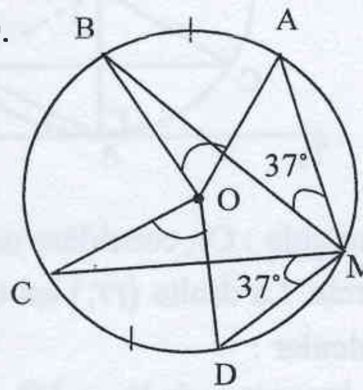
- Si $\widehat{AOB} = \widehat{PRQ}$ alors $\widehat{AB} = \widehat{PQ}$
- Si $\widehat{AB} = \widehat{PQ}$ alors $\widehat{AOB} = \widehat{PRQ}$



Dans le cercle ci-contre :

- si $\widehat{AOB} = \widehat{DOC}$ alors $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
- Si $\widehat{AB} = \widehat{PQ}$ alors $\widehat{AOB} = \widehat{PRQ}$

Exemple 1 : On considère un cercle de centre O, et les points A, B, C, D, M de ce cercle tels que $A\hat{M}B = C\hat{M}D = 37^\circ$. Calculer la mesure des angles $A\hat{O}B$, $C\hat{O}D$ et la mesure des arcs AB et CD.



Solution :

- Calculer la mesure de $A\hat{O}B$

  On a $A\hat{O}B$ et $A\hat{M}B$ interceptent le même arc AB donc $A\hat{O}B = 2 \times A\hat{M}B = 2 \times 37^\circ = 74^\circ$.
- Calculer la mesure de $C\hat{O}D$

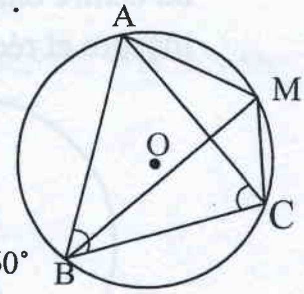
  On a $C\hat{O}D$ et $C\hat{M}D$ interceptent le même arc CD donc $C\hat{O}D = 2 \times C\hat{M}D = 2 \times 37^\circ = 74^\circ$.
- Calculer la mesure des arcs AB et CD

  Puis que $A\hat{O}B = C\hat{O}D = 74^\circ$ donc $\widehat{AB} = CD = 74^\circ$.

Exemple 2 : Un triangle équilatéral ABC est inscrit à un cercle de centre O. M est un point de l'arc AC ne contenant pas B. Calculer :

a. La mesure des arcs AB, AC et BC.

b. La mesure des angles $B\hat{M}A$, $B\hat{M}C$ et $A\hat{M}C$.



Solution :

a. Calculer la mesure des arcs AB, AC et BC

Puisque ABC est équilatéral, on a : $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60°$

On obtient donc $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 60°$.

b. Calculer la mesure des angles $B\hat{M}A$, $B\hat{M}C$ et $A\hat{M}C$.

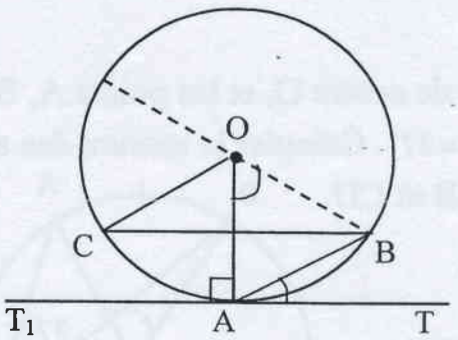
. $B\hat{M}A$ et $B\hat{C}A$ sont des angles inscrits interceptant le même arc AB donc ils ont même mesure : $B\hat{M}A = B\hat{C}A = 60°$

. $B\hat{M}C$ et $B\hat{A}C$ sont des angles inscrits interceptant le même arc BC donc ils ont même mesure : $B\hat{M}C = B\hat{A}C = 60°$

. $A\hat{M}C = A\hat{M}B + B\hat{M}C = 60° + 60° = 120°$.

6. Angle entre la corde et la tangente passant par l'extrémité de cette corde

La mesure d'un angle entre la corde et la tangente passant par l'extrémité de cette corde est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre interceptant cette corde.



$$\widehat{BAT} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

Exemple : On considère un cercle de centre O, et les points A, B, C de ce cercle. La droite (TT_1) est tangente à ce cercle en A et tels que $A\hat{B}C = 32°$.

Calculer :

a. la mesure de l'arc AC.

b. la mesure de l'angle $B\hat{A}T$.

Solution :

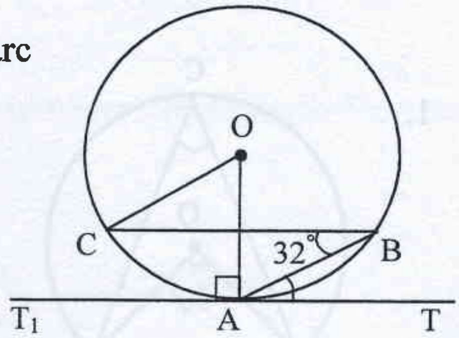
a. Calculer la mesure de l'arc AC

$\hat{ABC}$ est un angle inscrit interceptant l'arc AC donc $A\hat{B}C = \frac{1}{2} \times A\hat{O}C$ ou

$A\hat{O}C = 2 \times \widehat{A\hat{B}C} = 2 \times 32^\circ = 64^\circ$,

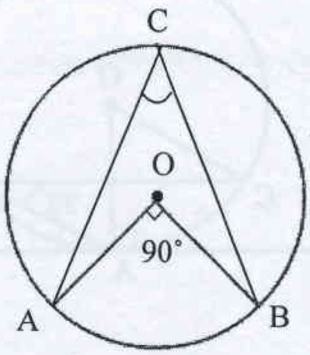
on obtient donc $AC = 64^\circ$

b. Puisque $(BC)//(TT_1)$ et la corde AB est la sécante donc $B\hat{A}T = A\hat{B}C = 32^\circ$.



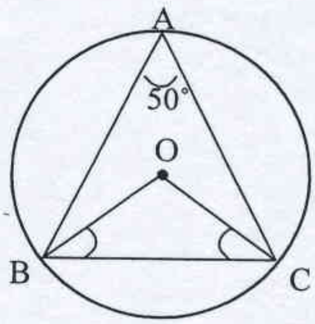
Exercices

1.



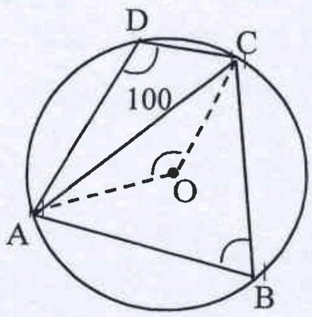
Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au triangle ABC tel que $A\hat{O}B = 90°$.
Calculer la mesure de l'angle $A\hat{C}B$

2.



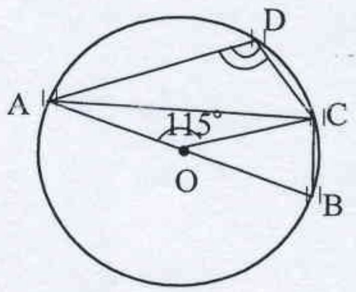
Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au triangle ABC et tel que $B\hat{A}C = 50°$.
Calculer la mesure de l'angle $O\hat{B}C$ et de l'angle $O\hat{C}B$.

3.



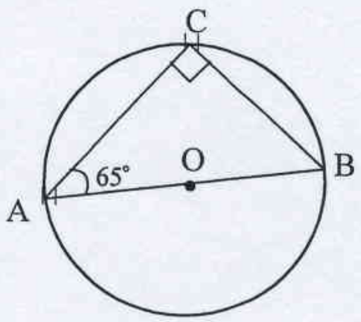
Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au quadrilatère ABCD tel que $A\hat{D}C = 100°$.
Calculer la mesure de l'angle $A\hat{O}C$ et de l'angle $A\hat{B}C$.

4.



Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au quadrilatère ABCD tel que $A\hat{O}C = 115°$.
Calculer la mesure de l'angle $A\hat{D}C$.

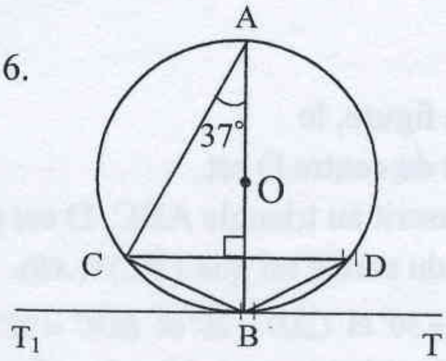
5.



Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au triangle ABC tel que $B\hat{A}C = 65°$.
Calculer la mesure de :

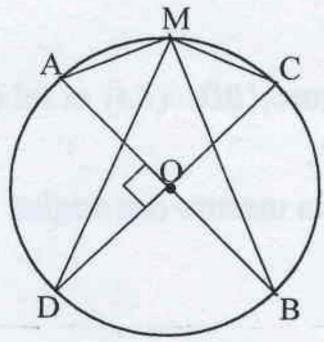
a. l'angle $A\hat{C}B$
b. les arcs AC; BC; AB.

6.



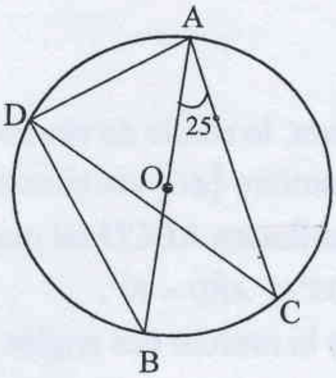
Sur la figure, $[AB]$ est un diamètre du cercle, $(AB) \perp (CD)$ et tel que $B\hat{A}C = 37°$.
La droite (TT_1) est tangente à ce cercle en B.
Calculer la mesure des angles :
$B\hat{C}D; B\hat{O}C; D\hat{B}T$; $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{BD}$.

7.



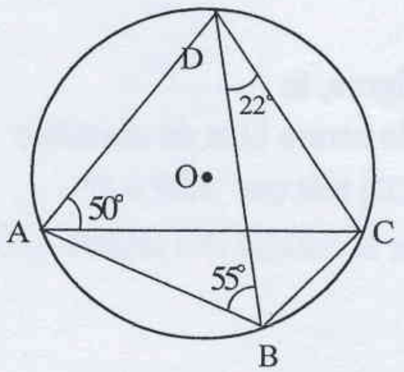
Sur la figure, les diamètres $[AB]$ et $[CD]$ sont perpendiculaires.
Calculer la mesure des angles :
$A\hat{M}B; D\hat{M}B; A\hat{M}D; B\hat{M}C$ *et* $A\hat{M}C$

8.



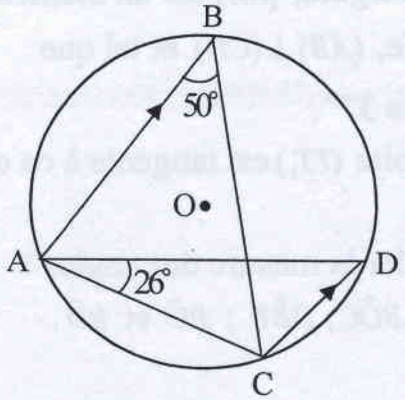
Sur la figure, $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O tel que
$B\hat{A}C = 25°$.
Calculer la mesure de l'angle $A\hat{D}C$.

9.



Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au quadrilatère ABCD tel que $A\hat{B}D = 55°$, $C\hat{A}D = 50°$ et $B\hat{D}C = 22°$
Calculer la mesure de l'angle $A\hat{C}B$.

10.

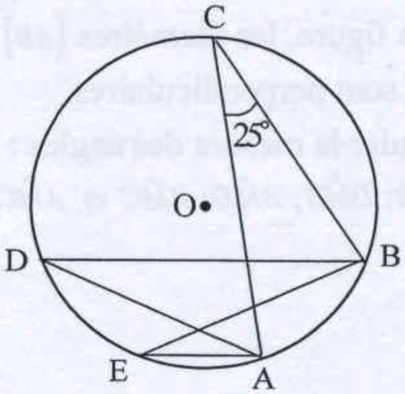


Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au triangle ABC. D est un point du cercle tel que $(DC)//(AB)$.

$A\hat{B}C = 50°$ et $C\hat{A}D = 26°$ et $B\hat{D}C = 22°$

Calculer la mesure de l'angle $B\hat{A}C$.

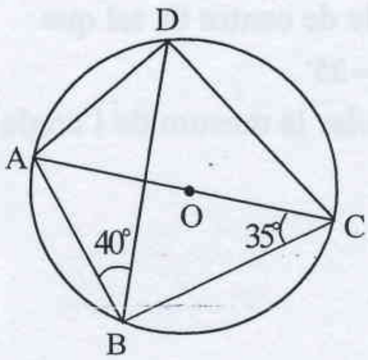
11.



Sur la figure, $(BD)//(EA)$ et tel que $A\hat{C}B = 25°$.

Calculer la mesure des angles $A\hat{D}B$ et $A\hat{E}B$.

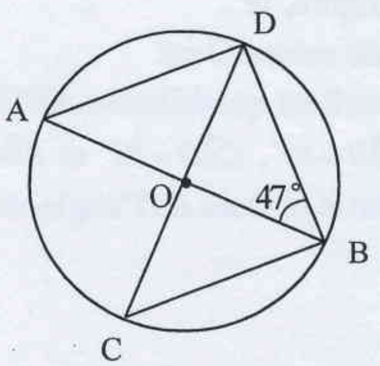
12.



Sur la figure, le cercle de centre O et de diamètre $[AC]$ est circonscrit au quadrilatère ABCD tel que $A\hat{C}B = 35°$ et $A\hat{B}D = 40°$.

Calculer la mesure des angles $B\hat{D}C$ et $C\hat{A}D$.

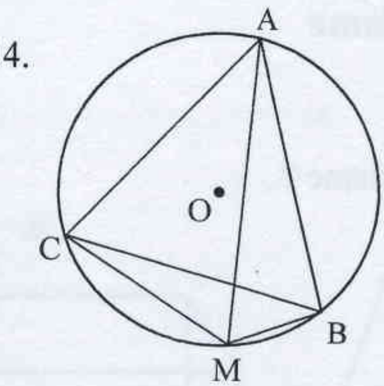
13.



Sur la figure, le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, $[CD]$ tels que $A\hat{B}D = 47°$

Calculer la mesure des angles $A\hat{D}C$ et $B\hat{C}D$.

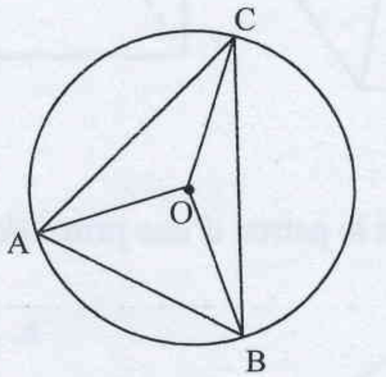
14.



Sur la figure, le cercle de centre O est circonscrit au triangle équilatéral ABC. M est un point de l'arc BC.

Calculer la mesure des angles $A\hat{M}B$, $A\hat{M}C$ et $B\hat{M}C$.

15.



Sur la figure le triangle ABC est inscrit dans le cercle de centre.

Comparer les mesures des angles $A\hat{O}B$ et $A\hat{C}B$; $B\hat{O}C$ et $B\hat{A}C$; $C\hat{O}A$ et $C\hat{B}A$.