Leçon 12 Fonctions rationnelles du type $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

1. Asymptote oblique

Définition

Dire que la droite d'équation d'équation $y=ax+b$ est une **asymptote oblique**

à C signifie que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \end{cases}$$

Théorème

Si une fonction définie sur un intervalle $[h,+\infty[$ est telle que

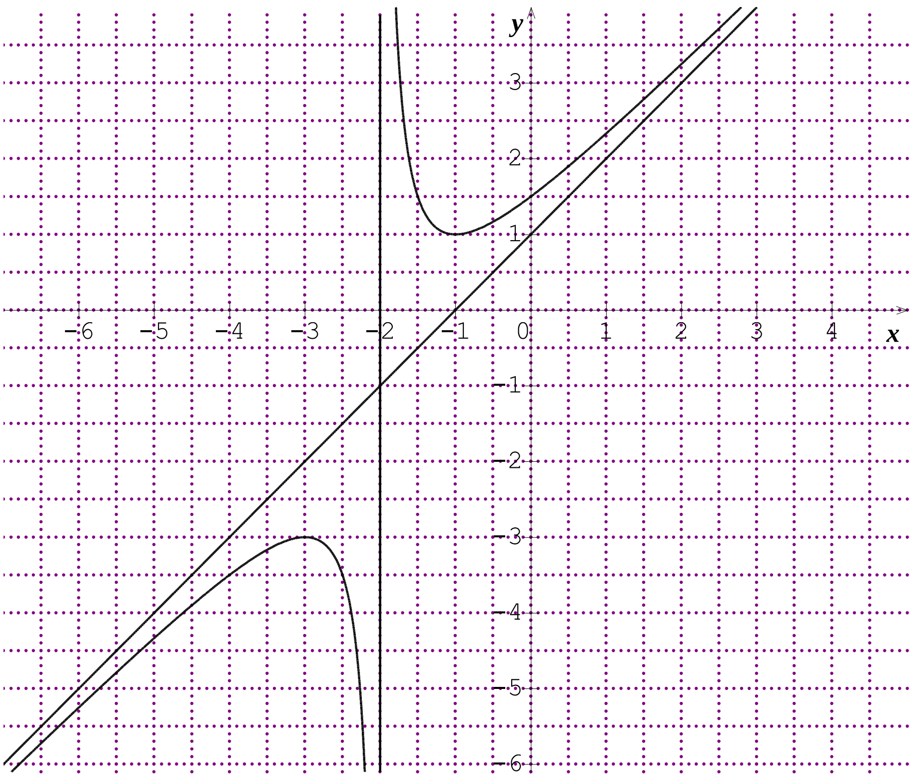
$f(x)=ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est

asymptote oblique à C.

Exemple : Soit f une fonction définie par $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+2}$

On a : $f(x)-(x+1)=\dfrac{1}{x+2}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ d'après le théorème.

Donc d'après la définition, C_f admet la droite d'équation $y=x+1$ pour asymptote oblique.



D'après le graphique, la fonction $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x+2}$ admet :

. le minimum -1 en $x=1$, on écrit $\min f = f(-1)=1$

. le maximum -3 en $x=-3$, on écrit $\max f = f(-3)=-3$

2. Des savoir-faire fondamentaux

Exemple 1 : Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe de cette fonction.

Solution

$f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$ est définie pour tout $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$. La fonction n'est pas continue en $x=1$. Donc $D_f=\Re-\{1\}$.

➢ On cherche les asymptotes

. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=-\infty \end{cases}$

La droite d'équation $x=1$ est une asimptote verticale à C_f.

. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=-\infty \end{cases}$

La courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale

. On cherche trois réels a, b et c tels que :

Pour tout $\forall x\in\Re-\{1\}$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

Or $\forall x\in\Re-\{1\}$, $ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$

$$\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$$

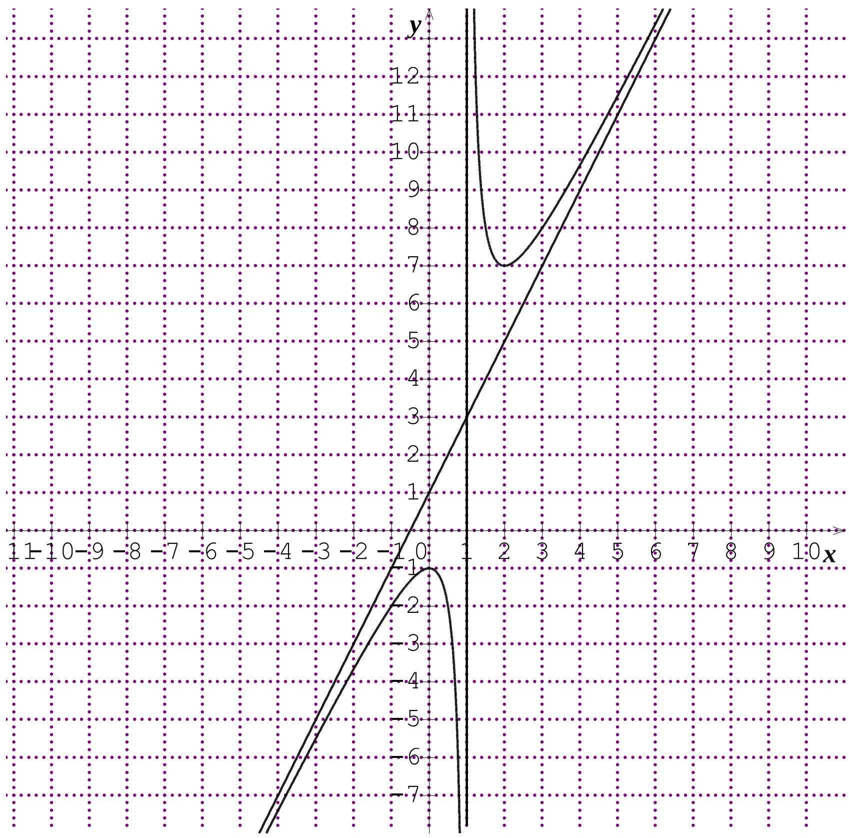
$$\frac{ax^2-(a-b)x-(b-c)}{x-1}=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$$

On obtient donc le système : $\begin{cases} a=2 \\ a-b=1 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$

On peut donc écrire : $\forall x \in \Re - \{1\},\ f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Ainsi : $\forall x \in \Re - \{1\},\ f(x) - 2x + 1 = \dfrac{2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$

Donc d'après la définition, C_f admet la droite d'équation $y = 2x + 1$ pour asymptote oblique.



D'après le graphique, la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x-1}$ admet :

. le minimum 7 en $x = 2$, on écrit $\min f = f(2) = 7$

. le maximum -1 en $x = 0$, on écrit $\max f = f(0) = -1$

Exemple 2 : Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x-1}$.

Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe de cette fonction.

Solution

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x-1}$ est définie pour tout $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

La fonction n'est pas continue en $x = 1$. Donc $D_f = \Re - \{1\}$.

- On cherche les asymptotes

. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-x-1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x-1}{x-1} = -\infty \end{cases}$

La droite d'équation $x=1$ est une asimptote verticale à C_f .

. On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = -\infty \end{cases}$

La courbe C_f n'admet pas d'asymptote horizontale

. On cherche trois réels a, b et c tels que :

Pour tout $\forall x \in \Re - \{1\},\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

Or $\forall x \in \Re - \{1\},\ ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{x^2-x-1}{x-1}$

$$\frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1} = \frac{x^2-x-1}{x-1}$$

$$\frac{ax^2 - (a-b)x - (b-c)}{x-1} = \frac{x^2-x-1}{x-1}$$

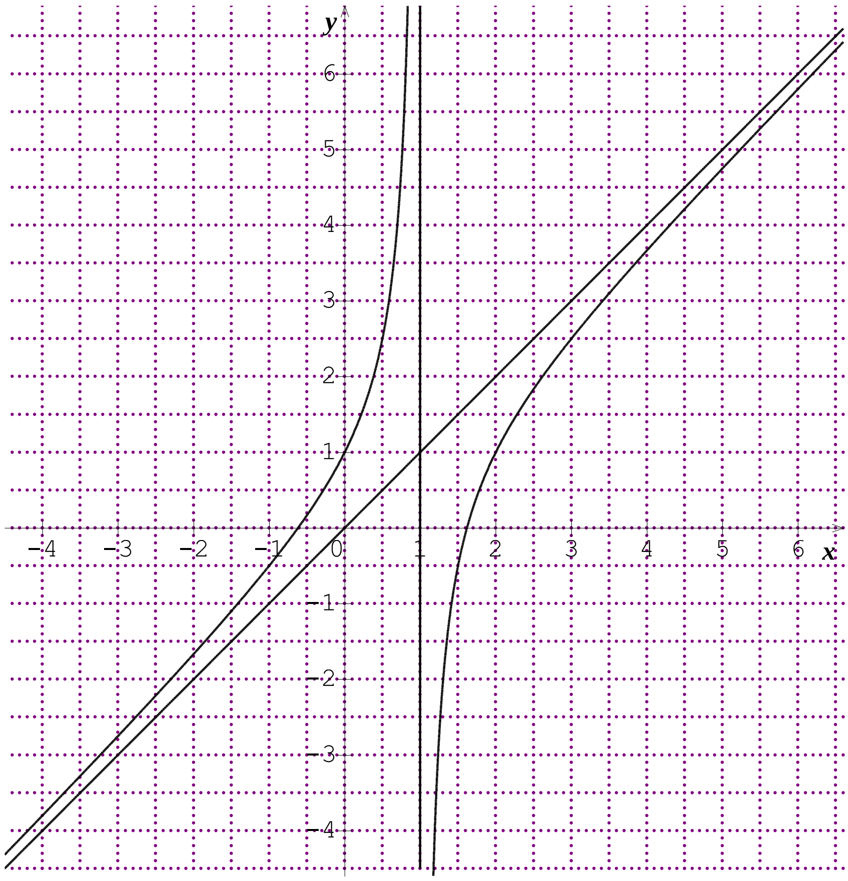
On obtient donc le système : $\begin{cases} a=1 \\ a-b=1 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$

On peut donc écrire : $\forall x \in \Re - \{1\},\ f(x) = x - \dfrac{1}{x-1}$

Ainsi : $\forall x \in \Re - \{1\},\ f(x) - 2x + 1 = \dfrac{2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$

Donc d'après la définition, C_f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote oblique.

D'après le graphique, la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-x-1}{x-1}$ n'admet pas de minimum, ni maximum.


y
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
x

Exercices

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes puis tracer leur courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-2}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{x-1}$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-4}{x-2}$

8) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{1-x}$

9) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{2x+2}$