Chapitre 5 Fonction logarithme

Leçon 21 Logarithme

1. **Généralités**

Définition

On appelle logarithme de base a, $(a>0 \ et \ a\neq 1)$ du réel strictement positif b l'unique solution de l'équation d'inconnue c : $a^c = b$.

On note cette solution $\log_a b$ qui se lit « logarithme de base a de b » .

On a donc : $b=a^c \Leftrightarrow c=\log_a$ et aussi $a^{\log_a b}=b$.

Exemple 1 : $9=3^2 \Leftrightarrow 2=\log_3 9$

$25=5^2 \Leftrightarrow 2=\log_5 25$

$8=2^3 \Leftrightarrow 3=\log_2 8$

Exemple 2 : Résoudre les équations

a. $\log_y 64=3$ b. $3^x=5$ c. $\log_2(x-6)=3$ d. $2^{x+1}=3$

Solution

a. $\log_y 64=3 \Leftrightarrow y^3=64$

$\Leftrightarrow y^3=4^3 \Rightarrow y=4$, donc $S=\{4\}$

b. $3^x=5 \Leftrightarrow x=\log_3 5$, donc $S=\{\log_3 5\}$

c. $\log_2(x-6)=3 \Leftrightarrow 2^3=x-6$

$\Leftrightarrow x=8+6=14$, donc $S=\{14\}$

d. $2^{x+1}=3 \Leftrightarrow \log_2 3=x+1$

$\Leftrightarrow x=\log_2 3-1$, donc $S=\{\log_2 3-1\}$.

Propriété

Pour tous réels strictement positifs x, y, a, b et c avec $a\neq 1, b\neq 1$ et $c\neq 1$, on a

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
4. $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
5. $\log_a x^k=k\log_a x,\ k\in\Re$
6. $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$
7. $\log_{a^k} x=\dfrac{1}{k}\log_a x,\ k\in\Re^*$
8. $a^{\log_a x}=x,\ \ x>0$
9. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$
10. $x^{\log_a y}=y^{\log_a x},\ \ x>0,\ y>0$

Remarque

1. $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x\,y) \neq (\log_a x)\times(\log_a y)$
3. $\log_a(x-y) \neq \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a \dfrac{x}{y} \neq \dfrac{\log_a x}{\log_a y}$
5. $\log_a x^k \neq (\log_a x)^k$, $k \in \Re$

2. Logarithme népérien

On appelle logarithme népérien ou logarithme naturel le logarithme de base e ($e = 2.71828$). On note $\ln$: $\ln x = \log_e x$

3. Logarithme décimal

On appelle logarithme décimal le logarithme de base 10. On note $\log$ ou $\lg$: $\log x = \log_{10} x$.

- Le logarithme népérien et le logarithme décimal généralisent celle de base a, $(a > 0\ \ et\ \ a \neq 1)$ tout en bénéficiant des mêmes propriétés algébriques.

4. Calcul logarithme

Exemple 1 : Calculer l'expression $A = \lg 15 + \lg 12 + \lg 5 - \lg 9$

Solution

$$\begin{aligned} A &= \lg 15 + \lg 12 + \lg 5 - \lg 9 \\ &= \left(\lg 15 + \lg 12 + \lg 5\right) - \lg 9 \\ &= \lg\left(\frac{15\times 12\times 5}{9}\right) \\ &= \lg\left(\frac{900}{9}\right) = \lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2(1) = 2 \end{aligned}$$

$$A = \lg 15 + \lg 12 + \lg 5 - \lg 9 = 2$$

Exemple 2 : Calculer $B = \log_5 625 + \log_3 \dfrac{1}{9} - \log_2 32$

Solution

$$\begin{aligned} B &= \log_5 625 + \log_3 \frac{1}{9} - \log_2 32 \\ &= \log_5 5^4 + \log_3 3^{-2} - \log_2 2^5 \\ &= 4\log_5 5 - 2\log_3 3 - 5\log_2 2 \\ &= 4(1) - 2(1) - 5(1) = 4 - 2 - 5 = -2 \end{aligned}$$

$$B = \log_5 625 + \log_3 \frac{1}{9} - \log_2 32 = -2$$

Exemple 3 : Étant donné $\alpha = \lg\sqrt[3]{\left(9^{-1}\right)\left(27\right)^{\frac{4}{3}}}$ et $\beta = \lg\dfrac{36}{7} - 2\lg\dfrac{6}{5} + \lg\dfrac{21}{25}$

Calculer $Q = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Solution

$$\alpha=\lg\sqrt[3]{\left(9^{-1}\right)\left(27\right)^{\frac{4}{3}}}=\lg\left[\left(3^{-2}\right)\left(3^{3}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{3}}=\lg\left[\left(3^{-2}\right)\left(3^{4}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\lg\left(3^{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\lg 3^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\lg 3$$

$$\beta=\lg\frac{36}{7}-2\lg\frac{6}{5}+\lg\frac{21}{25}=\lg\frac{36}{7}+\lg\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+\lg\frac{21}{25}$$

$$=\lg\left[\left(\frac{36}{7}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\times\left(\frac{21}{25}\right)\right]=\lg\left[\frac{36}{7}\times\frac{25}{36}\times\frac{21}{25}\right]=\lg\left(\frac{21}{7}\right)=\lg 3$$

$$Q=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\lg 3}{\frac{2}{3}\lg 3}=\frac{3\lg 3}{2\lg 3}=\frac{3}{2}$$

Exemple 4 : Calculer $P=\log_4\left(\log_3\left(\log_2 512\right)\right)$

Solution

$$P=\log_4\left(\log_3\left(\log_2 512\right)\right)=\log_4\left(\log_3\left(\log_2 2^{9}\right)\right)$$

$$=\log_4\left(\log_3\left(9\log_2 2\right)\right)=\log_4\left(\log_3 9\right)=\log_4\left(\log_3 3^{2}\right)$$

$$=\log_4\left(2\log_3 3\right)=\log_4 2=\log_{2^2} 2=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}.$$

$$P=\log_4\left(\log_3\left(\log_2 512\right)\right)=\frac{1}{2}$$

5. Application

Exemple 1 : Calculer l'expression $\alpha=\dfrac{3\times\sqrt[3]{0,0257}\times\left(0,632\right)^{4}}{17\times\sqrt[5]{1,93}}$

Solution

$$\alpha=\frac{3\times\sqrt[3]{0,0257}\times\left(0,632\right)^{4}}{17\times\sqrt{1,93}}$$

$$\lg\alpha=\lg\frac{3\times\sqrt[3]{0,0257}\times\left(0,632\right)^{4}}{17\times\sqrt[5]{1,93}}=\lg\left(3\times\sqrt[3]{0,0253}\times\left(0,632\right)^{4}\right)-\lg\left(17\times\sqrt[5]{1,93}\right)$$

$$=\lg 3+\lg\sqrt[3]{0,0257}+\lg\left(0,632\right)^{4}-\lg 17-\lg\sqrt[5]{1,93}$$

$$=\lg 3+\frac{1}{3}\lg\left(2,57\times10^{-2}\right)+4\lg\left(6,32\times10^{-1}\right)-\lg\left(1,7\times10^{1}\right)-\frac{1}{5}\lg 1,93$$

$$=0,4771+\frac{1}{3}\left(0,4099-2\right)+4\left(0,8007-1\right)-\left(0,2304+1\right)-\frac{1}{5}\left(0,2856\right)$$

$$=-2,1376=-0,1376-2=-0,1376+1-2-1=0,8624-3$$

$$\lg\alpha=\bar{3},8624$$

On suppose $\lg N=0,8624$

Sur la table de logarithmes, on trouve $\lg 7,28=0,8621$ et $\lg 7,29=0,8627$

On obtient donc $0,8621<\lg N<0,8627$

et $\dfrac{N-7,28}{7,29-7,28}=\dfrac{0,8624-0,8621}{0,8627-0,8621} \Rightarrow N=7,285$

Donc $\alpha=\dfrac{3\times\sqrt[3]{0,0257}\times(0,632)^4}{17\times\sqrt[5]{1,93}} \approx 7,285\times10^{-3}$

6. Utilisation d'une table de logarithmes décimaux

1) Caractéristique et mantisse d'un logarithme

Les tables de logarithmes déciaux ne donnent pas la partie entière de $\lg x$ mais donnent seulement sa mantisse. Il vous appartient déterminer vous-même la partie entière.

Soit x un nombre réel strictement positif, il existe un entier relatif unique n tel que $10^n \le x < 10^{n+1}$; il existe donc un nombre réel unique $x'>0$ tel que :

$x=10^n x'$ avec $1\le x'<10$

D'où $\lg x=\lg\left(10^n x'\right)=\lg 10^n+\lg x'=n+\lg x'$ avec $0\le \lg x'<1$

- Si $x\ge 1$, la caractéristique est le nombre de chiffres, diminué de 1, de la parie entière de x dans le système décimal.
- Si $0<x<1$, la caractéristique est un entier strictement négatif, sa valeur absolue est le rang du premier chiffre non nul situé après la virgule dans l'écriture décimale de x.
- Lorsque la caractéristique est négative au lieu d'écrire $n=-n'$ on l'écrit $\overline{n}'$.

  Exemple : $\lg 5177=\lg(10^3\times5{,}177)=3+\log 5{,}177$

  $\lg 5177=3+0{,}7141=3{,}7141$

  $\lg 0{,}5177=\log(10^{-1}\times5{,}177)=-1+\lg 5{,}177$

  $\lg 0{,}5177=-1+0{,}7141=\overline{1}{,}7141$
- La partie entière de $\lg x$ est appelée **caractéristique** de $\lg x$
- La partie décimale de $\lg x$ est appelée **mantisse** de $\lg x$

2) Recherche du rogarithme d'un nombre

Exemple : on cherche $\lg 7285$

On lit dans a table :

- L'intersection de la ligne 72 et de la colonne 8**,** on trouve pour mantisse de $\lg 728$: 8621
- Sur la colonne 5 de la différence tabulaire on trouve 3

  Donc $\lg 7285=3{,}8621+0{,}0005=3{,}8624$

Exercices

1. Mettre l'expression logarithme sous forme de la puissance et réciproquement pour l'expression puissance.

a. $5=\log_2 32$ b. $-\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{\frac{1}{2}}$ c. $\frac{1}{3}=\log_3\sqrt[3]{3}$

d. $\log_5 5=1$ e. $7^2=49$ f. $\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

2. Résoudre les équations suivantes.

a. $z=\log_3\frac{1}{9}$ b. $\log_{\sqrt{5}} w=2$ c. $\log_x 16=2$

d. $\log_{2\sqrt{2}}\frac{1}{64}=x$ e. $2^y=3$ f. $\frac{1}{7^z}=\frac{1}{15}$

3. Calculer les expressions suivantes.

a. $\lg 256-4\lg 400$ b. $\log_3\left(\sqrt[6]{27\sqrt[6]{81}}\right)^{\frac{1}{11}}$

c. $(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 6)...(\log_{242} 243)$ d. $\log_3\left(\log_2\left(\log_5 625\right)\right)$

e. $\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg\sqrt{8}-\lg\sqrt{125}}{\lg 6-\log 5}$ f. $8^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[6]{25}}+4^{\frac{1}{\log_5 2}}+4^{\frac{1}{\log_7 8}}$

g. $\log_5\left(\log_3 2^7\right)-\log_5\left(\log_3 2^3\right)+\log_2 2^{\log_5\frac{3}{7}}+4^{3\log_4 3-\frac{1}{3}\log_2 27}$

h. $(\log_3 5)(\log_{25} 81)\left(\log_{\sqrt{9}} 7\right)(\log_{49} 36)\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)\left(\log_3\frac{5}{9}\right)+4\log_5 5^{\log_3 5}$

4. Soit $\lg 3=\alpha$. Calculer $\log_{\frac{1}{9}} 9+\log_3\sqrt[3]{3}-\lg 0,81$

5. Soit $K.\,2^{3\log_2 6}=648$. Calculer $K^{-1}.\,2^{3\log_2 6}$

6. Soit $A=\left[\sqrt[3]{\sqrt[4]{8^{-1}}}\right]^{16}$. Calculer $\log_4\left(\log_{\frac{1}{2}} A\right)$

7. Soit $\Omega=\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{\lg 10000}{\log_2\sqrt{7}}}$. Calculer $\lambda=\sqrt{\Omega},\ \ \lambda>0$

8. Soit $\log_6 27=p$ et $2^{\log_4 576}=2^{\alpha+\beta}\times 3^{\alpha-\beta}$. Calculer $\left[(3-p)\log_{\sqrt{2}} 108-2p\right]^{\alpha\beta}$

9. Montrer que :

a. Si $x=\log_a(a-by)-\log_a y$ alors $y=\dfrac{a}{a^x+b}$

b. Si $\log_a x=\alpha\log_a y$ alors $\log_b x=\alpha\log_b y$

10. À l'aide du tableau logarithme, calculer :

a. $\dfrac{\sqrt[3]{100}\times\sqrt{1000}}{\sqrt[5]{10000}}$

b. $\dfrac{(6,45)^3\times\sqrt[3]{0,00034}}{(9,37)^2\times\sqrt[4]{8,93}}$

c. $\dfrac{(0,01)^{-3}\times\sqrt[-2]{2,72}}{\sqrt[5]{-2,96}}$

d. $\sqrt[5]{\dfrac{(2,59)^4\times\sqrt[3]{0,0836}}{(1,15)^2}}$

e. $\dfrac{(1,59)^2}{\sqrt[3]{0,382}}+\dfrac{\sqrt[4]{0,0896}}{(0,535)^3}$

f. $(-5,32)^3\times\sqrt[4]{0,0294}$

g. $\sqrt[7,062]{0,428}$

h. $\sqrt[10]{10+\sqrt[10]{10}}$

i. $(0,0325)^{0,0325}$