Leçon 32 Inéquations trigonométriques

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation $2\sin^2 x + 5\cos x < 4$. tel que $0 \le x < 2\pi$.
Solution

$2\sin^2 x + 5\cos x < 4 \Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x) + 5\cos x < 4$

$\Leftrightarrow 2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0$

Posons $\begin{cases} \cos x = t \\ -1 \le t \le 1 \end{cases}$

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 > 0$

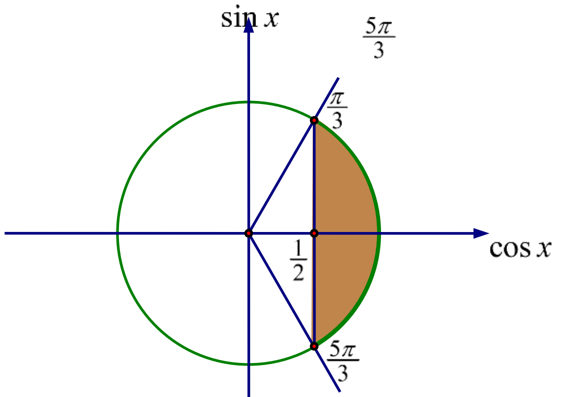
$\Leftrightarrow (t-2)(2t-1) > 0$

On obtient $\left[\begin{array}{l} t > 2 \quad \text{ne convient pas} \\ -1 \le t < \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

. $-1 \le t < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -1 \le \cos x < \dfrac{1}{2}$

$\begin{cases} \cos x < \dfrac{1}{2} \\ 0 \le x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} < x < 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

On a bien donc $S = \left]\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{5\pi}{3}\right[$



Exemple 2 : Résoudre l'inéquation $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.tel que $0 \le x < 2\pi$.

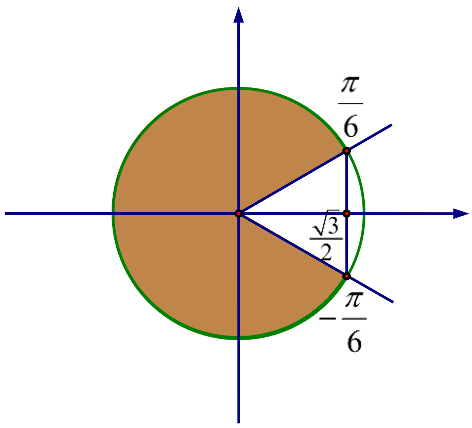
Solution

$\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$-\dfrac{\pi}{6} \le 2x - \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} \le 2x \le \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$

$\begin{cases} 0 \le x < 2\pi \\ \dfrac{\pi}{24} \le x \le \dfrac{5\pi}{24} \end{cases}$

On obtient donc $S = \left[\dfrac{\pi}{24} ; \dfrac{5\pi}{24}\right]$



Exemple 3 : Résoudre l'inéquation $\sin 2x > \cos x$. tel que $0 \le x < 2\pi$.
Solution

On a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

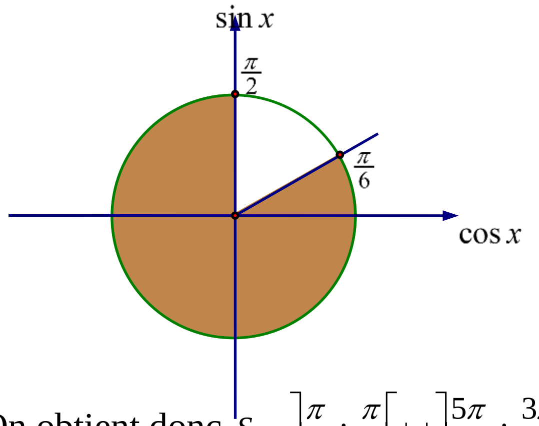
$\sin 2x > \cos x \Leftrightarrow 2\sin s \cos x - \cos x > 0$

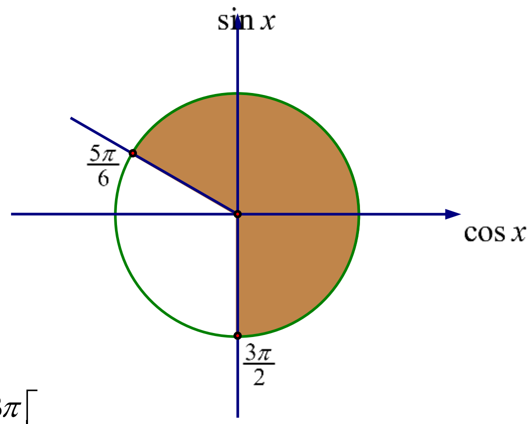
$\cos x(2\sin x - 1) > 0$

On résout : $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

. $\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{2}$

. $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \\ \dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{13\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{3\pi}{2}$





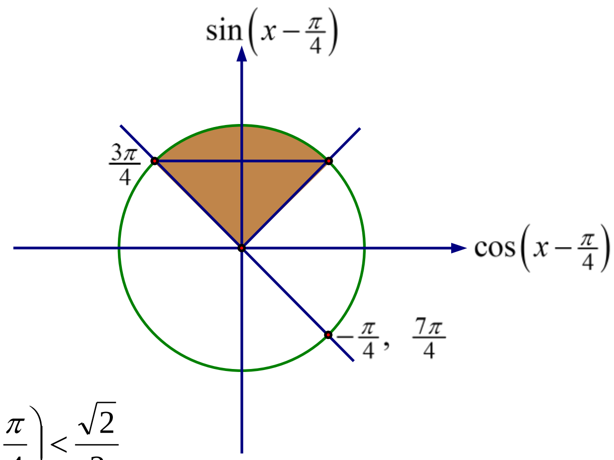
On obtient donc $S = \left]\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{3\pi}{2}\right[$

Exemple 4 : Résoudre l'inéquation $\sin x - \cos x < 1$. tel que $0 \le x < 2\pi$.

Solution

$\sin x - \cos x < 1 \Leftrightarrow \sin x - 1 \times \cos x < 1$

On sait que : $1 = \tan \dfrac{\pi}{4}$



$\sin x - 1 \times \cos x < 1 \Leftrightarrow \sin x - \tan \dfrac{\pi}{4} \cos x < 1$

$\sin x - \dfrac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} \cos x < 1$

$\Leftrightarrow \sin x \cos \dfrac{\pi}{4} - \sin \dfrac{\pi}{4} \cos x < \cos \dfrac{\pi}{4}$

$\sin x \cos \dfrac{\pi}{4} - \sin \dfrac{\pi}{4} \cos x < \cos \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} \le x - \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{3\pi}{4} \le x - \dfrac{\pi}{4} < 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi \le x < 2\pi \end{array}\right.$

. $0 \le x < 2\pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi \le x < 2\pi \end{array}\right.$

On obtient donc $S = \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right] \cup [\pi ; 2\pi[$

Exercices

1. Résoudre sur $[0\,;\,2\pi[$, les inéquations suivantes :
   a. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x + 1 > 0$.
   b. $1 - \sin x > 2\cos^2 x$.
2. Résoudre sur $[0\,;\,\pi]$, les inéquations suivantes :
   a. $\sin^2 x + \cos x - 1 < 0$.
   b. $0 < \sin x - \cos x < \sqrt{\frac{3}{2}}$.
   c. $2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos 2x \leq -1$.
3. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 \leq x < 2\pi\right)$
   b. $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 \leq x < 2\pi\right)$
   c. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}\left(0 \leq x < 2\pi\right)$
4. Résoudre sur $[0\,;2\pi[$, les inéquations suivantes :
   a. $\sin 2x < \sin x$
   b. $\sin 2x - \sin x \geq 0$.